Системи лінійних рівнянь

1. Розв'яжіть СЛР

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = & 0 \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n & = & 1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} & = & n-1 \end{array}$$

2. Чи будуть рівносильними дві СЛР, якщо одна одержується з іншої перенумерацією невідомих?

3. Доведіть, що коли дві сумісні СЛР є рівносильними, то і відповідні ОСЛР теж є рівносильними.

4. Знайдіть необхідну і достатньо умову, щоб сума двох розв'язків СЛР знову була розв'язком цієї СЛР.

5. Доведіть, що перестановку двох рядків матриці можна виконати за допомогою інших елементарних перетворень.

6. Дослідіть СЛР на сумісність і знайдіть загальний розв'язок СЛР в залежності від параметрів

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

7. Знайдіть усі цілочисельні розв'язки СЛР

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

Лінійна залежність векторів

1. Доведіть, що кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів також є лінійно незалежною.

2. З'ясуйте, чи є лінійно незалежними вектори $v = (1, i, 2-i, 3+i)$ і $u = (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

3. Чи є лінійно незалежною система векторів

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1, 1) \\ v_2 &= (1, -1, -1, -1) \\ v_3 &= (1, -1, 1, -1) \\ v_4 &= (1, 1, -1, -1) \end{aligned}$$

4. Нехай система векторів $v_1, \ldots, v_n$ — лінійно незалежна, а система $v_1, \ldots, v_n, u$ — лінійно залежна. Доведіть, що вектор u лінійно виражається через $v_1, \ldots, v_n$, причому єдиним способом.

   Доведіть, що якщо деякий вектор u єдиним способом лінійно виражається через вектори $v_1, \ldots, v_n$, то система векторів $v_1, \ldots, v_n$ — лінійно незалежна.

5. Нехай вектори $v_1, \ldots, v_n$ із цілими коефіцієнтами є лінійно залежними над полем $\mathbb{R}$. Доведіть

   (a) ці вектори є лінійно залежними над $\mathbb{Q}$;

   (b) існує нетривіальна лінійна комбінація $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ із цілими коефіцієнтами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, яка дорівнює нулю.

6. Доведіть, що для довільних векторів u, v, w і довільних чисел a, b, c вектори $au - bv, cv - aw, bw - cv$ є лінійно залежними.

7. Доведіть, що дві сумісні СЛР будуть рівносильними тоді і лише тоді, коли кожне рівняння кожної з цих систем є лінійною комбінацією рівнянь іншої системи.

Ранг системи векторів. Ранг матриці

1. Знайдіть ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

2. Знайдіть ранг матриці в залежності від параметра λ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

3. Як може змінитися ранг матриці, якщо з неї викреслити
   (a) один рядок;
   (b) один рядок і один стовпчик.

4. Нехай $A = (a_{ij})$ — матриця розмірності $m \times n$. Доведіть, що $\mathrm{rank} A \leq 1$ тоді і лише тоді, коли існують числа $b_1, \ldots, b_m$ і $c_1, \ldots, c_n$ такі, що $a_{ij} = b_i c_j$ для всіх i, j.

5. Доведіть, що якщо матриця має m рядків і ранг r, то довільні k рядків цієї матриці утворюють матрицю рангу $\geq r + k - m$.

6. Доведіть, що ранг кососиметричної матриці є парним числом.

Максимальні лінійно незалежні підсистеми

1. Знайдіть деяку МЛНЗПС системи векторів:
   (a) $v_1 = (-1, 4, -3, -2), v_2 = (3, -7, 5, 3), v_3 = (3, -2, 1, 0), v_4 = (-4, 1, 0, 1)$;
   (b) $v_1 = (3 - i, 1 - 2i, -7 + 5i, 4 + 3i), v_2 = (1 + 3i, 1 + i, -6 - 7i, 4i), v_3 = (0, 1, 1, -3)$.
2. Знайдіть усі МЛНЗПС системи векторів
$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 4), v_3 = (3, 2, 3), v_4 = (4, 3, 4), v_5 = (1, 1, 1)$$
3. Знайдіть деяку МЛНЗПС і виразіть через неї решту векторів:
   (a) $v_1 = (5, 2, -3, 1), v_2 = (4, 1, -2, 3), v_3 = (1, 1, -1, -2), v_4 = (3, 4, -1, 2)$;
   (b) $v_1 = (2, 3, -4, -1), v_2 = (1, -2, 1, 3), v_3 = (5, -3, -1, 8), v_4 = (3, 8, -9, -5)$.
4. Доведіть, що кожен ненульовий вектор даної системи векторів входить до складу деякої МЛНЗПС.
5. Що можна сказати про систему векторів, якщо вона містить
   (a) єдину МЛНЗПС;
   (b) рівно дві МЛНЗПС;
   (c) рівно три МЛНЗПС.
6. Нехай вектори $v_1, v_2, \dots, v_n$ є лінійно незалежними. Знайдіть усі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів $u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_2 - v_3, \dots, v_n = u_n - u_1$.