

БАЗОВІ ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

ВАЖЛИВЕ ЗАУВАЖЕННЯ 0.1. Тут наведені основні типи обчислювальних задач, що зустрічаються в першому модулі. Будь ласка не забудьте передивитись задачі на доведення та додаткові задачі, які розглядалися на парах та пропонувались в якості домашнього завдання.

1. Обчислити вирази:

$$(1) \frac{(2+i)(4+i)}{1+i};$$

$$(2) (3+i)^3 - (3-i)^3.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2 + 2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5 + 3i. \end{cases}$$

3. Розв'язати рівняння: $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$.

4. Зобразити на площині точки, що відповідають числам: $\pm 2 \pm 3\sqrt{5}i$.

5. Зобразити на площині множину точок, що відповідає комплексним числам z , що відповідають наступним умовам:

$$(1) -1 \leq \Re iz < 0;$$

$$(2) |\Re z + \Im z| < 1.$$

6.

7. Знайти тригонометричну форму чисел $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$.

8. Обчислити $(1 + i\sqrt{3})^{150}$

9. Представити у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$: $\sin 6x$.

10. Виразити через перші степені синуса та косінуса аргументів, кратних x : $\cos^6 x$.

11. Записати в алгебраїчній формі елементи множини $\sqrt[8]{8\sqrt{3}i} - 8$.

12. Розв'язати рівняння $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

13. Виразити в радикалах корінь з одиниці степеня 8.

14. Знайти кількість первісних коренів з одиниці степеня 36.

15. Знайти загальний та один частковий розв'язок системи методом Гауса:
$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

16. З'ясувати, чи є наступна система векторів лінійно незалежною:

$$a_1 = (4, -5, 2, 6),$$

$$a_2 = (2, -2, 1, 3),$$

$$a_3 = (6, -3, 3, 9),$$

$$a_4 = (4, -1, 5, 6).$$

17. Знайти всі значення λ , при яких b лінійно виражається через a_1, a_2, a_3 :

$$a_1 = (3, 4, 2),$$

$$a_2 = (6, 8, 7),$$

$$a_3 = (15, 20, 11),$$

$$b = (9, 12, \lambda).$$

18. Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (2, 1, -3, 1),$$

$$a_2 = (2, 2, -6, 2),$$

$$a_3 = (6, 3, -9, 3),$$

$$a_4 = (1, 1, 1, 1).$$

19. Знайти деякий базис системи векторів та виразити через нього інші вектори системи:

$$\begin{aligned}a_1 &= (1, 2, 3, -4), \\a_2 &= (2, 3, -4, 1), \\a_3 &= (2, -5, 8, -3), \\a_4 &= (5, 26, -9, -12), \\a_5 &= (3, -4, 1, 2).\end{aligned}$$

20. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

21. Знайти ранг матриці в залежності від λ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

22. Дослідити систему, знайти загальний розв'язок та ФСР в залежності від λ :

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

23. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків систем рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

24. Знайти ФСР системи, заданої матрицею:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

25. Знайти всі вектори простору \mathbb{R}^n , що переходять у вектор $b \in \mathbb{R}^m$ при відображенні $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданому матрицею A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$