

## Заняття №1. Комплексні числа: алгебраїчна форма та геометричне зображення.

### Основні задачі.

1.1. Обчисліть вирази:

- (1)  $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$ ;
- (2)  $(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i)$ ;
- (3)  $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$ ;
- (4)  $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$ ;
- (5)  $(2 + i)^3 + (2 - i)^3$ .

1.2. Обчисліть  $i^{77}$ ,  $i^{-57}$ .

1.3. Доведіть:  $(1 + i)^{8n} = 2^{4n}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

1.4. Розв'яжіть систему:

- (1) 
$$\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i, \\ (1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i; \end{cases}$$
- (2) 
$$\begin{cases} 2z_1 - (1 + i)z_2 = -i, \\ (4 - 2i)z_1 - 5z_2 = -1 - 2i. \end{cases}$$

1.5. Знайти такі дійсні числа  $x$  та  $y$ , такі що:

$$(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i.$$

1.6. Довести: комплексне число  $z$  є дійсним тоді і лише тоді, коли  $\bar{z} = z$ .

1.7. Довести твердження: сума та добуток двох комплексних чисел є дійсними тоді і лише тоді, коли або дані числа спряжені, або обидва вони дійсні.

1.8. Розв'язати рівняння:

- (1)  $z^2 = i$ ;
- (2)  $z^2 = 5 - 12i$ ;
- (3)  $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ .

1.9. Розв'язати рівняння:  $|z| + z = 8 + 4i$ .

1.10. Зобразити на площині точки, що відповідають числам:

- (1) 5;
- (2)  $-3i$ ;
- (3)  $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$ .

1.11. Знайти комплексні числа, що відповідають:

- (1) вершинам квадрата з центром в початку координат, зі сторонами довжини 1, що паралельні координатним осям.
- (2) вершинам правильного шестикутника з центром в точці  $2 + i\sqrt{3}$ , стороною, паралельною осі абсцис та радіусом описаного кола, рівним 2.

1.12. Зобразіть на площині множину точок, що відповідають комплексним числам  $z$ , що задовольняють наступним умовам:

- (1)  $|z| = 1$ ;
- (2)  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ;
- (3)  $|z + 3 + 4i| \leq 5$ ;
- (4)  $|\operatorname{Re} z| \leq 1$ ;
- (5)  $|z - 1| + |z + 1| = 3$ .

### Додаткові задачі.

1.13. Доведіть тотожність  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$  та поясніть її геометричний зміст.

1.14. Зобразіть на площині множину точок, що відповідають комплексним числам  $z$ , що задовольняють рівність  $|z^2 - q| = \lambda$ , де  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda > 0$ .

### Домашнє завдання.

1.15. Обчисліть вирази:

(1)  $(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i)$ ;

(2)  $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$ .

1.16. Обчисліть  $i^{98}$ ,  $i^{-13}$ .

1.17. Доведіть:  $(1 + i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

1.18. Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} (1 - i)z_1 - 3z_2 = -i, \\ 2z_1 - (3 + 3i)z_2 = 3 - i. \end{cases}$$

1.19. Знайти такі дійсні числа  $x$  та  $y$ , такі що:  $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$ .

1.20. Довести: комплексне число  $z$  є уявним тоді і лише тоді, коли  $\bar{z} = -z$ .

1.21. Довести твердження: добуток двох комплексних чисел є дійсними тоді і лише тоді, коли одне з них відрізняється від спряженого другого на дійсний множник.

1.22. Розв'язати рівняння:  $z^2 = 5 - 12i$ .

1.23. Розв'язати рівняння:  $|z| - z = 8 + 12i$ .

1.24. Зобразити на площині точки, що відповідають числам:

(1)  $-2$ ;

(2)  $\pm\sqrt{31} \pm i$ .

1.25. Знайти комплексні числа, що відповідають вершинам правильного трикутника з центром в початку координат, стороною паралельною осі ординат, вершиною на від'ємній дійсній напівосі та радіусом описаного кола рівним 1.

1.26. Зобразіть на площині множину точок, що відповідають комплексним числам  $z$ , що задовольняють наступним умовам:

(1)  $|z - 1 - i| < 1$ ;

(2)  $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$ ;

(3)  $|z + 2| - |z - 2| = 3$ ;

(4)  $-1 < \operatorname{Re} iz < 0$ .