

## Заняття №2. Тригонометрична форма комплексного числа. Корені з комплексних чисел.

### Основні задачі.

1.1. Знайти тригонометричну форму числа:

- (1) 5;
- (2)  $-3i$ ;
- (3)  $1 + i$ ;
- (4)  $1 - (2 + \sqrt{3})i$ ;
- (5)  $\sin \alpha + i \cos \alpha$ .

1.2. Обчислити вирази:

- (1)  $(1 + i)^{1000}$ ;
- (2)  $(\sqrt{3} + i)^{30}$ ;
- (3)  $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^{24}$ .

1.3. Довести властивості модуля комплексних чисел:

- (1)  $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$  тоді і лише тоді, коли вектори  $z_1$  та  $z_2$  мають протилежні напрямки.

1.4. Довести, що якщо  $|z| < 1$ , то  $|z^2 - z + i| < 3$ .

1.5. Обчислити вирази ( $n \in \mathbb{Z}$ ):

- (1)  $(1 + i)^n$ ;
- (2)  $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^n$ .

1.6. Представити у вигляді многочленів від  $\sin x$  та  $\cos x$  функції:

- (1)  $\sin 4x$ ;
- (2)  $\cos 5x$ .

1.7. Виразити через перші степені синуса та косінуса аргументів, кратних  $x$ , функції:

- (1)  $\sin^4 x$ ;
- (2)  $\cos^5 x$ .

1.8. Довести, що якщо  $z + z^{-1} = 2 \cos \phi$ , то  $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\phi$ , де  $n \in \mathbb{Z}$ .

1.9. Записати в тригонометричній формі елементи множини:

- (1)  $\sqrt[6]{i}$ ;
- (2)  $\sqrt[10]{512(1 - i\sqrt{3})}$ .

1.10. Записати в алгебраїчній формі елементи множини:

- (1)  $\sqrt[3]{1}$ ;
- (2)  $\sqrt[6]{64}$ ;
- (3)  $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$ ;
- (4)  $\sqrt[3]{1 + i}$ ;
- (5)  $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$ .

1.11. Нехай  $z$  та  $w$  - комплексні числа. Довести рівності множин<sup>1</sup>:

- (1)  $\sqrt[n]{z^nw} = z \sqrt[n]{w}$ ;
- (2)  $\sqrt[n]{zw} = u \sqrt[n]{w}$ , де  $u$  - одне з значень  $\sqrt[n]{z}$ .

1.12. Розв'язати рівняння:

- (1)  $(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0$ ;
- (2)  $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$ .

### Додаткові задачі.

1.13. Довести рівність:

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x.$$

<sup>1</sup>За означенням множина  $zA = \{za | a \in A\}$ .

**Домашнє завдання.**

1.14. Знайти тригонометричну форму числа:

- (1)  $\sqrt{3} - i$ ;
- (2)  $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

1.15. Обчислити вираз  $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$ .

1.16. Довести властивості модуля комплексних чисел:

- (1)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  тоді і лише тоді, коли вектори  $z_1$  та  $z_2$  мають однакові напрямки.

1.17. Довести, що якщо  $|z| \leq 2$ , то  $1 \leq |z^2 - 5| \leq 9$ .

1.18. Представити у вигляді многочленів від  $\sin x$  та  $\cos x$  функції:

- (1)  $\sin 5x$ ;
- (2)  $\cos 4x$ .

1.19. Виразити через перші степені сінуса та косінуса аргументів, кратних  $x$ , функції:

- (1)  $\sin^5 x$ ;
- (2)  $\cos^4 x$ .

1.20. Записати в тригонометричній формі елементи множини  $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$ .

1.21. Записати в алгебраїчній формі елементи множини:

- (1)  $\sqrt[3]{i}$ ;
- (2)  $\sqrt[3]{2-2i}$ .

1.22. Нехай  $z$  та  $w$  - комплексні числа. Довести рівність множин:  $\sqrt[n]{-z^n w} = -z \sqrt[n]{w}$ .