ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Заняття №3. Корені з одиниці.

Основні задачі.

3.1. Виразити в радикалах корені з одиниці степеня 2, 3, 6.

3.2. Знайти кількість первісних коренів з одиниці степеня:
(1) 2;
(2) 12;
(3) p^k, де p - просте число.

3.3. Обчисліть:
(1) суму всіх коренів з одиниці степеня n;
(2) добуток всіх первісних коренів з одиниці степеня n.

3.4. Довести:
(1) $\sqrt[n]{1} = \{\epsilon_0, \epsilon_1, ..., \epsilon_{n-1}\}$, де $\epsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \leqslant k < n$;
(2) $\epsilon_k = \epsilon_1^k$, $0 \leqslant k < n$;
(3) $\epsilon_k \epsilon_l = \begin{cases} \epsilon_{k+l}, & \text{якщо } k+l < n, \\ \epsilon k + l - n, & \text{якщо } k+l \geqslant n; \end{cases}$ $(0 \leqslant k < n,\ 0 \leqslant l < n)$.

3.5. Довести, що:
(1) якщо $(r, s) = 1$ і $\alpha^r = \alpha^s = 1$, то $\alpha = 1$;
(2) якщо $d = (r, s)$, то $\mathbb{U}_r \cap \mathbb{U}_s = \mathbb{U}_d$ ($\mathbb{U}_n$ - множина коренів степеня n з одиниці);
(3) якщо $(r, s) = 1$, то кожен корінь степеня rs з одиниці однозначно представляється як добуток кореня степеня r на корінь степеня s.

3.6. Довести, що наступні твердження є рівносильними:
(1) ϵ - первісний корінь з одиниці степеня n;
(2) n - найменше число таке, що $\epsilon^n = 1$ (в такому випадку говорять, що n - *степінь* числа ϵ в групі $\mathbb{U}_n$);
(3) довільне число $\alpha \in \mathbb{U}_n$ можна записати як $\alpha = \epsilon^k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$ (говорять, що ϵ - твірний елемент групи $\mathbb{U}_n$.

3.7. Довести, що якщо ϵ - первісний корінь степеня n з одиниці, то $\bar{\epsilon}$ теж є первісним коренем степеня n з одиниці

3.8. Довести, що якщо числа $(r, s) = 1$, то ϵ - первісний корінь з одиниці степеня rs тоді і лише тоді, коли ϵ є добутком первісного кореня степеня r на первісний корінь степеня s.

3.9. Довести, що:
(1) кількість первісних коренів степеня n з одиниці дорівнює $\phi\{n\}$ (функції Ойлера від n);
(2) якщо $(m, n) = 1$, то $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$;
(3) якщо $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_s^{k_s}$, де $p_1, ..., p_s$ - різні прості числа, то

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_s}).$$

3.10. Позначимо $\sigma(n)$ суму всіх первісних коренів з одиниці степеня n. Довести:
(1) $\sigma(1) = 1$;
(2) при $n > 1$: $\sum_{d|n} \sigma(d) = 0$;
(3) $\sigma(p^k) = 0$, якщо p - просте, $k > 1$.

Додаткові задачі.

3.11. Обчисліть суми:

(1) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ...$;
(2) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - c_n^7 + ...$;
(3) $1 + C_n^4 + C_n^8 + ...$;
(4) $1 + 2\epsilon^3\epsilon^2 + ... + n\epsilon^{n-1}$.

3.12. Доведіть рівності:

(1) $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$;
(2) $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \sin \frac{5\pi}{n} + ... + \sin \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$;
(3) $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x + \epsilon_k)^n = x^n + y^n$ ($\epsilon_0, ..., \epsilon_{n-1}$ = корені з одиниці степеня n).

Домашнє завдання.

3.13. Виразити в радикалах корені з одиниці степеня 4, 12.

3.14. Знайти кількість первісних коренів з одиниці степеня:

(1) 3;
(2) 24.

3.15. z корінь з одиниці степеня n. Чому дорівнює z^{-1}?

3.16. Позначимо $\sigma(n)$ суму всіх первісних коренів з одиниці степеня n. Довести:

(1) $\sigma(p) = -1$, якщо p - просте;
(2) $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$, якщо $(r, s) = 1$.