

**Основні задачі.**

5.1. Знайти лінійну комбінацію  $3a_1 + 5a_2 - a_3$ , де  $a_1 = (4, 1, 3, -2)$ ,  $a_2 = (1, 2, -3, 2)$ ,  $a_3 = (16, 9, 1, -3)$ .

5.2. З'ясувати, чи є наступні системи векторів лінійно незалежними:

(1)  $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (3, 6, 7);$

(2)  $a_1 = (2, -3, 1), a_2 = (3, -1, 5), a_3 = (1, -4, 3);$

(3)  $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5), a_2 = (0, 1, 0, 3, 4), a_3 = (0, 0, 1, 4, 7), a_4 = (2, -3, 4, 11, 12).$

5.3. Довести, що якщо вектори  $a_1, a_2, a_3$  є лінійно залежними, а вектор  $a_3$  не виражається лінійно через вектори  $a_1, a_2$ , то  $a_1$  та  $a_2$  відрізняються між собою лише на числовий множник.

5.4. Довести, що якщо вектори  $a_1, \dots, a_k$  лінійно незалежні, а вектори  $a_1, \dots, a_k, b$  лінійно залежні, то вектор  $b$  виражається лінійно через  $a_1, \dots, a_k$ .

5.5. Нехай система  $a_1, a_2, a_3, a_4$  є лінійно незалежною. Чи буде тоді лінійно незалежною наступна система:

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4,$$

$$b_2 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4,$$

$$b_3 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4?$$

5.6. Нехай система векторів  $a_1, \dots, a_k$  є лінійно незалежною. Чи є лінійно незалежною система векторів:

(1)

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_1 + a_2;$$

$$b_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$

...

$$b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k;$$

(2)

$$b_1 = a_1 + a_2;$$

$$b_2 = a_2 + a_3;$$

$$b_3 = a_3 + a_4;$$

...

$$b_{k-1} = a_{k-1} + a_k;$$

$$b_k = a_k + a_1;$$

(3)

$$b_1 = a_1 - a_2;$$

$$b_2 = a_2 - a_3;$$

$$b_3 = a_3 - a_4;$$

...

$$b_{k-1} = a_{k-1} - a_k;$$

$$b_k = a_k - a_1;$$

5.7. Знайти всі значення  $\lambda$ , при яких вектор  $b$  лінійно виражається через вектори  $a_1, a_2, a_3$ :

(1)

$$a_1 = (2, 3, 5),$$

$$a_2 = (3, 7, 8),$$

$$a_3 = (1, -6, 1),$$

$$b = (7, -2, \lambda);$$

(2)

$$a_1 = (3, 2, 6),$$

$$a_2 = (7, 3, 9),$$

$$a_3 = (5, 1, 3),$$

$$b = (\lambda, 2, 5).$$

**Додаткові задачі.**

5.8. Доведіть, що кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів також є лінійно незалежною.

5.9. З'ясуйте, чи є лінійно незалежними вектори  $v_1 = (1, i, 2 - i, 3 + i)$ ,  $v_2 = (1 - i, 1 + i, 1 - 3i, 4 - 2i)$ .

5.10. Чи є лінійно незалежною система векторів

$$v_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$v_2 = (1, -1, -1, -1),$$

$$v_3 = (1, -1, 1, -1),$$

$$v_4 = (1, 1, -1, -1)?$$

5.11. Нехай система  $v_1, \dots, v_n$  - лінійно незалежна, а система  $v_1, \dots, v_n, u$  - лінійно залежна. Доведіть, що вектор  $u$  лінійно виражається через  $v_1, \dots, v_n$ , причому в єдиний спосіб.

Доведіть, що якщо деякий вектор  $u$  єдиним способом лінійно виражається через вектори  $v_1, \dots, v_n$ , то система  $v_1, \dots, v_n$  - лінійно незалежна.

5.12. Нехай вектори  $v_1, \dots, v_n$  з цілими коефіцієнтами є лінійно залежними над  $\mathbb{R}$ . Доведіть:

(1) ці вектори є лінійно залежними над  $\mathbb{Q}$ ;

(2) існує нетривіальна комбінація  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  із цілими коефіцієнтами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , яка дорівнює нулю.

5.13. Доведіть, що для довільних векторів  $u, v, w$  і довільних чисел  $a, b, c$  вектори  $au - bv$ ,  $cv - aw$ ,  $bw - cv$  є лінійно залежними.

5.14. Доведіть, що дві сумісні СЛР будуть рівносильними тоді і лише тоді, коли кожне рівняння кожної з цих систем є лінійною комбінацією рівнянь іншої системи.

### Домашнє завдання.

5.15. З'ясувати, чи є наступна система векторів лінійно незалежною:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

5.16. Нехай система векторів  $a_1, \dots, a_k$  є лінійно незалежною. Чи є лінійно незалежною система векторів:

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_1 + 2a_2;$$

$$b_3 = a_1 + 2a_2 + 3a_3;$$

...

$$b_k = a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k?$$

5.17. Знайти всі значення  $\lambda$ , при яких вектор  $b$  лінійно виражається через вектори  $a_1, a_2, a_3$ :

$$a_1 = (4, 4, 3),$$

$$a_2 = (7, 2, 1),$$

$$a_3 = (4, 1, 6),$$

$$b = (5, 9, \lambda)$$

Відповіді. 5.1 [ 1 4 -7 7 ]

5.2 1. так; 2. так; 3. ні.

5.5 ні.

5.6 1. незалежна; 2. залежна при парному  $k$ ; 3. залежна.

5.7 1.  $\lambda = 15$ ; 2. не існує.

5.9 так.

5.10 так.

5.15 ні.

5.16 незалежна.

5.17 довільне  $\lambda$ .