

**Основні задачі.**

6.1. Знайти ранг матриці за допомогою мінорів та елементарних перетворень:

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2. Знайти ранг матриці в залежності від параметра  $\lambda$ :

$$(1) \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3. Довести, що якщо ранг матриці  $A$  не змінюється при додавання до неї довільного стовпчика матриці  $B$  з тією самою кількістю рядків, то він не змінюється при додаванні до  $A$  всіх стовпчиків матриці  $B$ .

6.4. Довести, що ранг суми матриць не перевищує суми рангів цих матриць.

6.5. Довести, що ранг добутку матриць не перевищує рангу кожної з матриць-співмножників.

6.6. Знайти всі базиси системи векторів:

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 0, 0), \\ a_2 &= (1, 2, 3, 4), \\ a_3 &= (3, 6, 0, 0); \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_1 &= (3, 2, 3), \\ a_2 &= (2, 3, 4), \\ a_3 &= (3, 2, 3), \\ a_4 &= (4, 3, 4), \\ a_5 &= (1, 1, 1); \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 3, 4), \\ a_2 &= (2, 3, 4, 5), \\ a_3 &= (3, 4, 5, 6), \\ a_4 &= (4, 5, 6, 7). \end{aligned}$$

6.7. В якому випадку система векторів має єдиний базис?

6.8. Знайти деякий базис системи векторів та виразити через нього інші вектори системи:

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= (5, 2, -3, 1), \\ a_2 &= (4, 1, -2, 3), \\ a_3 &= (1, 1, -1, -2), \\ a_4 &= (3, 4, -1, 2); \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 1), \\ a_2 &= (3, 2), \\ a_3 &= (1, 1), \\ a_4 &= (2, 3). \end{aligned}$$

6.9. Нехай всі вектори  $a_1, a_2, \dots, a_k$  лінійно незалежні. Знайти всі базиси системи векторів

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_2, \\ b_2 &= a_2 - a_3, \\ b_3 &= a_3 - a_4, \\ &\dots \\ b_{k-1} &= a_{k-1} - a_k, \\ b_k &= a_k - a_1. \end{aligned}$$

### Додаткові задачі.

6.10. Довести, що ранг матриці  $(A|B)$  не перевищує суму рангів матриць  $A$  та  $B$ .

6.11. Довести, що будь-яку матрицю рангу  $r$  можна представити у вигляді суми  $r$  матриць рангу 1, але не можна представити у вигляді суми меншої кількості матриць.

**Означення 6.1.** Дві системи векторів називаються еквівалентними, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу.

6.12. Довести, що еквівалентні системи мають однаковий ранг. Чи правда обернене твердження: дві довільні системи однакового рангу є еквівалентними?

6.13. Довести, що дві еквівалентні лінійно незалежні системи містять однакову кількість векторів.

6.14. Що можна сказати про ранг довільної матриці  $A$  розміру  $m \times n$ , якщо в ній є лише один базисний мінор?

6.15. Довести, що в матриці рангу  $r$  на перетині довільних  $r$  лінійно незалежних рядків та  $r$  лінійно незалежних стовпчиків стоїть ненульовий мінор порядку  $r$ .

### Домашнє завдання.

6.16. Знайти ранг матриці за допомогою мінорів та елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

6.17. Знайти ранг матриці в залежності від параметра  $\lambda$ :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

6.18. Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (4, -1, 3, -2),$$

$$a_2 = (8, -2, 6, -4),$$

$$a_3 = (3, -1, 4, -2),$$

$$a_4 = (6, -2, 8, -4).$$

6.19. Знайти деякий базис системи векторів та виразити через нього інші вектори системи:

$$a_1 = (2, -1, 3, 5),$$

$$a_2 = (4, -3, 1, 3),$$

$$a_3 = (3, -2, 3, 4),$$

$$a_4 = (4, -1, 15, 17),$$

$$a_5 = (7, -6, -7, 0).$$

**Відповіді.** 6.1 1) 2, 2) 5.

6.2 1) 2 при  $\lambda = 1$ , 3 при  $\lambda \in \{2, 3\}$ , 4 інакше.

2) 2 при  $\lambda = 3$ , 3 інакше.

6.6 1)  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_2, a_3)$ .

2)  $(a_1, a_2, a_4)$ ,  $(a_2, a_3, a_4)$ .

3) довільні два вектори.

6.8 1)  $(a_1, a_2, a_4)$ ,  $a_3 = a_1 - a_2$ .

2)  $(a_1, a_2)$ ,  $a_3 = -a_1 + a_2$ ,  $a_4 = -5a_1 + 4a_2$ .

6.16 3.

6.17 3 при  $\lambda \in \{0, -2, -4\}$ , 4 інакше.

6.18  $(a_1, a_4)$ ,  $(a_2, a_4)$ .

6.19  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $a_4 = 2a_1 - 3a_2 + 4a_3$ ,  $a_5 = a_1 + 5a_2 - 5a_3$ .