

**Основні задачі.**

8.1. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків систем рівнянь:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

8.2. Знайти ФСР системи, заданої матрицею:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

8.3. Знайти ФСР системи:

$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

8.4. Знайти ФСР системи в залежності від  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

8.5. Знайти всі вектори простору  $\mathbb{R}^n$ , що переходять у вектор  $b \in \mathbb{R}^m$  при відображенні  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданому матрицею  $A$ :

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \\ 2 & -4 & -14 & 31 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

**Додаткові задачі.**

8.6. Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Показати, що ФСР даної системи можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{r1}, 1, 0, \dots, 0), \\ y_2 &= (c_{12}, c_{22}, \dots, c_{r2}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ y_{n-r} &= (c_{1,n-r}, c_{2,n-r}, \dots, c_{r,n-r}, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Пояснити зміст  $c_{ij}$  та  $r$ .

### Домашнє завдання.

8.7. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$$

8.8. Знайти ФСР системи, заданої матрицею:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

8.9. Знайти ФСР системи в залежності від  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

8.10. Знайти всі вектори простору  $\mathbb{R}^n$ , що переходять у вектор  $b \in \mathbb{R}^m$  при відображенні  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданому матрицею  $A$ :

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -14 \\ 2 & -6 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Відповіді.** 8.1

(1)  $x_1 = 8x_3 - 7x_4$ ,  $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ ;  $\{(8, -6, 1, 0)^T, (-7, 5, 0, 1)^T\}$ ;

(2) якщо  $n = 3k$  або  $n = 3k + 1$ , то система має нульовий розв'язок.

В інших випадках:  $x_{3k} = 0$ ,  $x_{3k+1} = -x_n$ ,  $x_{3k+2} = x_n$ ;  $\{(-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots, 0, -1, 1)\}$ .

8.5

(1)  $(2, 3, 1)^T$ ;

(2)  $(1, 2, 22/5, 8/5)^T + \alpha(5, 0, -17, -8)^T + \beta(0, 5, 34, 16)^T$

8.7 система має лише нульовий розв'язок.

8.10  $(0, 0, 2, -1)^T + \alpha(13, 0, 9, -1)^T + \beta(0, 13, -27, 3)^T$ .