Заняття №9. Підстановки.

Основні задачі.

9.1. Перемножити підстановки у вказаному та оберненому порядку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.2. Записати у вигляді добутку незалежних циклів:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & ... & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

9.3. Записати підстановку у вигляді таблиці: $(1\ 3\ 5\ ...\ 2n-1)(2\ 4\ 6\ ...\ n)$.

9.4. Перемножити підстановки: $[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]$.

9.5. Визначити парність підстановки:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & ... & ... & ... & n-1 & n \\ 2 & 4 & 6 & ... & 1 & 3 & 5 & ... & ... \end{pmatrix}$.

9.6. Визначити парність підстановки:

(1) $(1\ 2\ 3\ ...\ k)$;
(2) $(i_1\ i_2\ i_3\ ...\ i_k)$;
(3) $(i_1\ i_2)(i_3\ i_4)(i_5\ i_6)...(i_{2k-1}i_{2k})$.

9.7. Довести, що довільну підстановку $\sigma \in S_n$ можна представити у вигляді добутку транспозицій вигляду $(1\ 2)$, $(1\ 3)$,..., $(1\ n)$.

9.8. Довести, що довільну підстановку $\sigma \in S_n$ можна представити у вигляді добутку циклів $(1\ 2)$ та $(1\ 2\ 3\ ...\ n)$.

Означення 1.

$$d(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} (l_i - 1),$$

де σ розкладається на добуток з k незалежних циклів з довжинами l_i.

9.9. Нехай $d = d(\sigma)$ - декремент σ. Доведіть:

(1) $sgn\sigma = (-1)^d$;
(2) σ можна представити у вигляді добутку d транспозицій;
(3) σ не можна представити у вигляді добутку меншої за d кількості транспозицій.

9.10. Довести, що довільну парну підстановку можна представити у вигляді добутку потрійних циклів.

9.11. Довести, що довільну парну підстановку можна представити у вигляді добутку циклів вигляду $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2\ 4)$, ..., $(1\ 2\ n)$.

Додаткові задачі.

Означення 2. (1) Граф в загальному випадку - це набір точок (вершин), деякі з яких поєднані відрізками (ребрами).
(2) Шлях в графі - це послідовність вершин таких, що кожна пара послідовних вершин поєднана принаймні одним ребром.
(3) Під зв'язним графом розуміється такий, між довільними двома вершинами якого існує принаймні один шлях.

9.12. Нехай T - деякий набір транспозицій з S_n, а Γ - граф з множиною вершин $1, 2, ..., n$ та множиною ребер T. Довести:

(1) довільну підстановку з S_n можна представити у вигляді добутку транспозицій з набору T тоді й лише тоді, коли граф Γ - зв'язний.
(2) при $|T| < n-1$ існує підстановка з S_n, яку не можна представити у вигляді добутку транспозицій з набору T.

Домашнє завдання.

9.13. Перемножити підстановки у вказаному та оберненому порядку:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

9.14. Записати у вигляді добутку незалежних циклів:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n & n+1 & n+2 & ... & 2n\\ n+1 & n+2 & ... & 2n & 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix}$.

9.15. Записати підстановку у вигляді таблиці: (136)(247)(5).

9.16. Перемножити підстановки: $[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)]\cdot[(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]$.

9.17. Довести, що довільну підстановку $\sigma \in S_n$ можна представити у вигляді добутку транспозицій вигляду $(1\ 2)$, $(2\ 3)$,..., $(n-1\ n)$.

Відповіді. 9.1

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 2\end{pmatrix}$

9.2

(1) $(1\ 5\ 3)(2\ 4\ 7)$;

(2) $(1\ 2)(3\ 4)...(2n-1\ 2n)$.

9.3 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & ... & 2n-1 & 2n\\ 3 & 4 & 5 & 6 & ... & 1 & 2\end{pmatrix}$

9.4 (1 6 4 2 5 7 3).

9.5

(1) непарна;

(2) $(-1)^{[\frac{n+2}{2}]}$.

9.6

(1) парна;

(2) парна при непарному k;

(3) парна при парному k.

9.13 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

9.14

(1) $(1\ 3\ 6\ 2)(4\ 7)$;

(2) $(1\ n+1)(2\ n+2)...(n\ 2n)$.

9.15 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$

9.16 (2 6 5 3 7)