Зміст

Передмова

Методична розробка пропонує 18 занять із математичної логіки, враховуючи те, що на розгляд логічних виводів у логіці висловлювань відводиться два заняття.

Кожне заняття містить такі розділи: теоретичні відомості з прикладами, основні задачі (типові задачі з теми, які дозволяють розвинути необхідні навички та більш досконало розглянути теоретичний матеріал) і домашнє завдання. Більшість розділів також включає кілька додаткових задач підвищеної складності.

Теоретичний матеріал базується переважно на підручнику Ю. А. Дрозда [**3**]. Розділи, присвячені машинам Т'юрінга та рекурсивним функціям, використовують великою мірою методичну розробку А. С. Олійника та В. І. Сущанського [**4**].

У кінці кожного заняття дано посилання на відповідні розділи та параграфи підручників, наведених у списку літератури.

Розділ 1

Логіка висловлювань

Заняття № 1. Висловлювання. Логічні сполучники

Неформальна теорія та приклади

Тут і далі будемо позначати через $\mathbf{B}$ множину булевих значень, тобто $\mathbf{B} = \{$хибність, істина$\} = \{0,1\}$.

Означення 1.1. *Висловлювання — це деяке твердження, яке може бути хибним або істинним.*

Означення 1.2. *n-місний логічний сполучник — функція $\mathbf{C}$:$\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$, яка за довільними висловлюваннями $\mathbf{A}_1$,...,$\mathbf{A}_n$ будує нове висловлювання $\mathbf{CA}_1...\mathbf{A}_n$ в такий спосіб, що коли про кожне з початкових висловлювань відомо хибне воно чи істинне, то й про нове висловлювання це відомо.*

Найважливішими сполучниками є бінарні, тобто двомісні, та унарний, тобто одномісний (табл. 1).

A	**B**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}$	$\neg\mathbf{A}$
		кон'юнкція	диз'юнкція	імплікація	еквіваленція	заперечення
		«і»	«або»	«якщо...то»	«тоді й лише тоді»	«не»
0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Таблиця 1. **Бінарні та унарний сполучники**

Ці сполучники ми надалі введемо до алфавіту логіки висловлювань, а пізніше й відношень, і будемо постійно використовувати.

Зауваження 1.3. Послідовність застосування сполучників:

1) $\neg$ — заперечення;

2) $\wedge$,$\vee$ — кон'юнкція, диз'юнкція;

3) $\to$, $\leftrightarrow$ — імплікація, еквіваленція.

Приклад 1.4. *Записати мовою логіки висловлювань речення Якщо Лондон — столиця Парижа, а Париж — столиця Рима, то всі кішки сірі». Знайти логічне значення цього висловлювання.*

Розв'язання ✎. Атомарними висловлюваннями в цьому випадку є «Лондон — столиця Парижа», «Париж — столиця Рима» та «всі кішки сірі». Позначимо їх літерами **A**, **B** і **C** відповідно. Тоді речення запишеться мовою логіки висловлювань як $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C}$.

Щоб підрахувати логічне значення цього висловлювання складемо таблицю 2.

A	**B**	**C**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{C}$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблиця 2. **Приклад знаходження логічного значення**

Формальна теорія та приклади

Означення 1.5. *1) Алфавіт $\mathfrak{A}_0$ логіки висловлювань складається з таких восьми символів*:

$$\mathbf{A},\ |,\ (,\ ),\ \neg,\ \vee\ ,\ \wedge\ ,\ \to .$$

2) Атомом або елементарним висловлюванням називається слово в цьому алфавіті, побудоване за такими правилами:

(*a*) *слово, яке складається з однієї літери* **A**, *є атомом*;

(*b*) *якщо слово* **W** *є атомом, то й слово* **W**| *також є атомом*;

(*c*) *інших атомів, крім таких, які можуть бути побудовані за правилами* (*a*) *і* (*b*), *не існує.*

3) *Реченням називається слово в цьому алфавіті, побудоване за такими правилами*:

(*a*) *кожен атом є реченням*;

(*b*) *якщо слово* $\mathbf{W}$ *є реченням, то й слово* $\neg\mathbf{W}$ *є реченням*;

(*c*) *якщо слова* $\mathbf{W}$ *та* $\mathbf{V}$ *є реченнями, то й слова* $(\mathbf{W} \to \mathbf{V})$, $(\mathbf{W} \vee \mathbf{V})$, $(\mathbf{W} \wedge \mathbf{V})$ *також є реченнями*;

(*d*) *інших речень, крім таких, які можуть бути побудовані за правилами* (*a*), (*b*) *і* (*c*), *не існує.*

ОЗНАЧЕННЯ 1.6. *1*) *Інтерпретацією* (*в логіці висловлювань*) *називається функція* $\mathcal{I}{:}\mathfrak{E} \to \mathbb{B} = \{,0,1,\}$, *де* $\mathfrak{E}$ *позначає множину атомів.*

2) *Для кожної інтерпретації* $\mathcal{I}$ *та довільного речення* $\mathbf{A}$ *визначимо значення речення* $\mathbf{A}$ *в інтерпретації* $\mathcal{I}$, *яке позначається* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A})$, *у такий спосіб.*

(*a*) *Якщо* $\mathbf{A}$ *— атом, то* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = \mathcal{I}(\mathbf{A})$.

(*b*) *Якщо* $\mathbf{A} = \neg\mathbf{B}$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 1; \\ 1, & \text{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 0. \end{cases}$$

(*c*) *Якщо* $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{C}) = 0; \\ 1, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

(*d*) *Якщо* $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{C}) = 1; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

(*e*) *Якщо* $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 1, \text{ а } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{C}) = 0; \\ 1, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Очевидно, цими правилами визначається в єдиний спосіб $\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A})$ *для довільної інтерпретації* $\mathcal{I}$ *і довільного речення* $\mathbf{A}$.

Означення 1.7. *Речення називається тавтологією, якщо воно набуває істинних значень у довільній інтерпретації.*

Приклад 1.8. *Перевірити, що речення є тавтологією*:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}. \tag{1}$$

Розв'язання ✎. Звичайно завжди можна скласти таблицю значень речення і в такий спосіб переконатись, що воно є тавтологією. Але в загальному випадку такий спосіб є занадто довгим. Оптимально доводити подібні твердження методом від супротивного.

Припустимо, що існує така інтерпретація $\mathcal{I}$, що $\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 0$. Імплікація обертається в нуль тільки в одному випадку — коли ліворуч від сполучника стоїть істина, а праворуч — хибність (тут і далі див. таблицю 1). Отже, за зміни інтерпретації $\mathcal{I}$

$$\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1;$$
$$\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 0.$$

Але диз'юнкція обертається в 0 тільки у випадку, коли ліворуч і праворуч від сполучника стоять нулі. Отже, наша система перетворюється на

$$\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1;$$
$$\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A}) = 0;$$
$$\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 0,$$

що очевидно є суперечністю, бо кон'юнкція двох хибностей буде хибністю. Отже, речення (1) справді є тавтологією.

Для того, щоб показати, що речення не є тавтологією достатньо надати хоча б одну інтерпретацію $\mathcal{I}$, в якій воно перетворюється в 0.

Приклад 1.9. *Довести, що речення не є тавтологією*:

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{A}.$$

Розв'язання ✎. Нам відомо, що імплікація обертається в нуль тільки у випадку, коли ліворуч в ній стоїть істина, а праворуч — хибність:

$$\underbrace{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}_{1} \to \underbrace{\mathbf{A}}_{0}$$

Таким чином одержуємо значення в шуканій інтерпретації атома $\mathbf{A}$: $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = 0$.

Диз'юнкція дорівнює одиниці, якщо хоча б один із атомів дорівнює одиниці. Значення атома $\mathbf{A}$ вже зафіксовано, отже, залишається значення $\mathbf{B}$: $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 1$.

Таким чином побудували інтерпретацію $\mathcal{I}$, в якій вказане речення хибне, а отже довели, що воно не є тавтологією.

Якщо потрібно визначити, чи є речення тавтологією, в загальному випадку оптимальним буде шлях перевірки від супротивного (приклад 1.8). У такому випадку або приходимо до протиріччя (тобто доводимо, що речення є тавтологією), або знаходимо інтерпретацію, в якій воно хибне (тобто доводимо, що речення не є тавтологією).

Основні задачі

1.1. Записати мовою логіки висловлювань речення. Знайти їх логічні значення.

1) На вулиці світить сонце та йде дощ, отже зараз зима.
2) Якщо вівці білі, а Англія — острів, то або вівці не білі, або зараз ніч.

1.2. Які з тверджень є висловлюваннями?

1. Даний трикутник є прямокутним.
2. Існують прямокутні трикутники.
3. Давайте підемо в кіно.
4. Дощ мокрий.
5. Мокрий дощ.

1.3. Із атомарних висловлювань $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ побудувати за допомогою сполучників $\neg$,$\wedge$ таке речення $\mathbf{C}$, в якому

1) $\mathbf{C}$ істинне тоді й лише тоді, коли $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ обидва істинні;

2) $\mathbf{C}$ істинне тоді й лише тоді, коли $\mathbf{A}$ істинне, а $\mathbf{B}$ хибне;

3) $\mathbf{C}$ істинне тоді й лише тоді, коли $\mathbf{A}$ хибне, а $\mathbf{B}$ істинне;

4) $\mathbf{C}$ істинне тоді й лише тоді, коли $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ обидва хибні.

1.4. Із атомарних висловлювань $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ та сполучників логіки висловлювань побудувати речення, яке буде істинним тоді й лише тоді, коли істинний один з атомів (будь-який).

1.5. Скільки різних n-арних сполучників можна побудувати?

1.6. Перевірити, що для довільних $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ речення є тавтологіями:

1) $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;

2) $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;

3) $\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

4) $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C}))$;

5) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

6) $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Ці речення є аксіомами логіки висловлювань. Інші аксіоми логіки висловлювань доводяться в домашньому завданні (1.19).

1.7. Перевірити, чи є тавтологіями речення:

1) $((\mathbf{A} \to \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \to (\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A})) \to \neg\mathbf{B}$;

2) $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$.

1.8. У які дні тижня істинним є речення?

1. Якщо сьогодні вівторок, то завтра понеділок.
2. Якщо сьогодні понеділок, то завтра вівторок.

1.9. Довести, що якщо $\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ і $\neg\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$ — тавтології, то $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ також тавтологія.

1.10. Довести, що якщо $\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ і $\neg\mathbf{C} \to \neg\mathbf{B}$ є тавтологіями, то $\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ також тавтологія.

1.11. Речення логіки висловлювань містить тільки сполучник «еквіваленція». Довести, що це речення є тавтологією тоді й лише тоді, коли кожне атомарне висловлювання зустрічається в ньому парну кількість разів.

1.12. Якою мінімальною кількістю бінарних та унарних сполучників можна обмежитись у логіці висловлювань? Знайдіть усі можливі вирази одних сполучників через інші.

Додаткові задачі

1.13. Нехай $\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_n$ — атомарні висловлювання, що входять до речення $\mathbf{A}$. Довести, що таблицю значень $\mathbf{A}$, розглянутого як речення, складене з атомарних висловлювань $\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_n,...,\mathbf{A}_m$, можна розбити на 2^{m-n} частин, кожна з яких збігатиметься з таблицями значень $\mathbf{A}$, розглянутого відносно атомарних висловлювань $\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_n$.

1.14. Записати речення, не використовуючи дужок — лише зі застосуванням логічних сполучників:

1) $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;

2) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))$;

3) $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$;

4) $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C}))$;

5) $(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \to ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}))$;

6) $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to \neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}))$;

7) $(\mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1) \to ((\mathbf{A}_2 \to \mathbf{B}_2) \to (... \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_n)...))$.

1.15. Розглянемо тернарний сполучник, який відповідає конструкції "якщо $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}$, в іншому разі $\mathbf{C}$". Називатимемо таку конструкцію «структурою вибору».

1. Записати цей сполучник мовою логіки висловлювань.
2. Показати, що довільне речення логіки висловлювань еквівалентне структурі вибору.
3. Показати, що речення F та G еквівалентні:

   F = якщо (якщо $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}$, в іншому разі $\mathbf{C}$), то $\mathbf{B}'$, в іншому разі $\mathbf{C}'$;

$G =$ якщо $\mathbf{A}$, то (якщо $\mathbf{B}$, то $\mathbf{B}'$, в іншому разі $\mathbf{C}'$), в іншому разі (якщо $\mathbf{C}$, то $\mathbf{B}'$, в іншому разі $\mathbf{C}'$).

4. Казатимемо, що структура вибору проста, якщо між "якщо"і "то"стоїть атомарне висловлювання. Покажіть, що довільну структуру вибору можна перетворити на просту структуру вибору.

Домашнє завдання

1.16. Записати таблицю значень таких речень:

1) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$;

2) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to \neg\mathbf{C}$;

3) $(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}) \wedge ((\neg\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \vee \mathbf{B})$.

1.17. Записати мовою логіки висловлювань такі речення.

1. Йде дощ або хтось не вимкнув душ.

2. Якщо студент втомлений або голодний, то він не може вчитись.

1.18. Записати мовою логіки висловлювань речення. Знайти логічне значення.

«Якщо студент прокинеться і піде на пару, він буде задоволений, а якщо не прокинеться, то задоволеним він не буде.»

1.19. Перевірити, що для довільних речень $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ такі речення є тавтологіями:

1) $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$;

2) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

3) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))$;

4) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A})$.

1.20. Довести, що якщо $\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$ і $\neg\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ є тавтологіями, то $\mathbf{B}$ – також тавтологія.

1.21. $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ — атомарні висловлювання. За допомогою сполучників $\neg$, $\to$ побудувати таке висловлювання $\mathbf{C}$, у якому:

1) $\mathbf{C}$ хибне тоді й лише тоді, коли $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ обидва істинні;

2) **C** хибне тоді й лише тоді, коли **A** істинне, а **B** хибне;

3) **C** хибне тоді й лише тоді, коли **A** хибне, а **B** істинне;

4) **C** істинне тоді й лише тоді, коли **A** хибне, а **B** істинне.

Література.

[**3**, с. 5–12]; [**4**, с. 19–30].

Заняття № 2. Логічні міркування. Речення

Теоретичні відомості

Означення 2.1. *Речення* $\mathbf{B}$ *називається логічним наслідком із множини речень* Γ, *якщо для кожної інтерпретації* $\mathcal{I}$, *в якій кожне речення* $F \in \Gamma$ *має значення* 1, *також* $\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 1$. *Іншими словами, коли перетин множин істинних значень речень* $\mathcal{I}_\Gamma$ *з множини* Γ *лежить у множині істинних значень речення* $\mathbf{B}$, $\mathcal{I}_\mathbf{B}$: $\mathcal{I}_\Gamma \subseteq \mathcal{I}_\mathbf{B}$. *Позначається це* $\Gamma \models \mathbf{B}$.

Означення 2.2. *Множина речень* Γ *називається*

- *сумісною, якщо існує така інтерпретація* $\mathcal{I}$, *що* $\forall F \in \Gamma$ $\operatorname{val}(\mathcal{I},F) = 1$;
- *логічно несумісною, якщо не існує такої інтерпретації* $\mathcal{I}$, *в якій* $\operatorname{val}(\mathcal{I},\mathbf{A}) = 1$ *для всіх речень* $\mathbf{A} \in \Gamma$.

Означення 2.3. *Речення* $\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{B}$ *називаються еквівалентними (пишуть* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$*), якщо* $\mathbf{A} \models \mathbf{B}$ *і* $\mathbf{B} \models \mathbf{A}$.

Приклад 2.4. *Перевірити, чи є логічно правильними міркування: «Коли в мене не працює транклюкатор, я викликаю інженера. Коли я викликаю інженера, до мене приходить його помічник. Помічник інженера до мене не прийшов. Отже транклюкатор працює.»*

Розв'язання ✎. Множина Γ у прикладі містить три речення, що складаються з таких атомів:

$\mathbf{A}$	–	транклюкатор не працює;
$\mathbf{B}$	–	я викликаю інженера;
$\mathbf{C}$	–	до мене приходить помічник інженера.

Запишемо це міркування мовою логіки висловлювань:

$$\Gamma = \{\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \neg\mathbf{C}\} \models \neg\mathbf{A}.$$

Припустимо, що існує інтерпретація $\mathcal{I}$ така, що всі речення з множини Γ в ній істинні, а речення $\neg\mathbf{A}$ — хибне. У такий спосіб ми або знайдемо таку інтерпретацію (тобто покажемо, що міркування не є логічними), або доведемо, що її не існує.

$$
\begin{array}{lrcl}
(2) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}\to\mathbf{B}) & = & 1;\\
(3) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}\to\mathbf{C}) & = & 1;\\
(4) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\neg\mathbf{C}) & = & 1 \Rightarrow \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{C}) = 0;\\
(5) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\neg\mathbf{A}) & = & 0 \Rightarrow \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = 1.
\end{array}
$$

Із рівностей (2) та (5) випливає, що $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) = 1$.

Але тоді не можуть бути справедливими одночасно рівність (3]) (яка перетворюється на $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},1\to\mathbf{C}) = 1$) та рівність (4]).

Таким чином ми довели, що інтерпретації з шуканими властивостями не існує, отже, міркування є істинним.

Приклад 2.5. *Показати, що наведена множина речень є сумісною*:

$$\{\mathbf{A}\to\mathbf{B}\wedge\mathbf{C},\mathbf{A}\vee\mathbf{B},\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}\}.$$

Розв'язання ✎. Щоб показати сумісність множини речень, достатньо надати хоча б одну інтерпретацію, в якій всі ці речення є істинними. Побудуймо таку інтерпретацію $\mathcal{I}$, у якій

$$
\begin{array}{lrcl}
(6) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}\to\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}) & = & 1;\\
(7) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) & = & 1;\\
(8) & \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}) & = & 1.
\end{array}
$$

Почнемо з речення (8), оскільки кон'юнкція накладає максимум обмежень на істинність речення. Із нього дістаємо:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{B}) & = & 1;\\
\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{C}) & = & 1.
\end{array}
$$

Оскільки диз'юнкція істинна, якщо хоча б один атом істинний, то речення (7) вже істинне, без додаткових обмежень на $\mathbf{A}$.

Імплікація істинна наприклад у випадку, коли ліворуч у ній стоїть хибність, тому покладемо

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\mathbf{A}) = 0.$$

Таким чином ми побудували інтерпретацію, в якій всі речення заданої множини — істинні, а отже довели, що множина — сумісна.

Зауважимо, що в загальному випадку така інтерпретація не єдина, але достатньо навести одну.

Приклад 2.6. *Перевірити, чи є наведена множина речень сумісною*:

$$\{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \neg\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}\}.$$

Розв'язання ✎. Припустимо, що множина є сумісною, тобто існує така інтерпретація $\mathcal{I}$, у якій

$$\operatorname{val}(\mathcal{I}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1; \tag{9}$$
$$\operatorname{val}(\mathcal{I}, \neg\mathbf{A}) = 1; \tag{10}$$
$$\operatorname{val}(\mathcal{I}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}) = 1. \tag{11}$$

Із виразу (10) одразу маємо значення $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{val}(\mathcal{I}, \mathbf{A}) = 0.$$

Але кон'юнкція хибна, якщо хоча б один атом хибний. Тоді

$$\operatorname{val}(\mathcal{I}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 0.$$

Це суперечить виразу (9). Отже ми прийшли до протиріччя, і наше початкове припущення — хибне. Таким чином доведено, що множина речень є несумісною.

Основні задачі

2.1. Перевірити, чи є логічно правильними такі міркування.

1) Якщо Джонс п'є багато віскі, то у Джонса червоний ніс. У Джонса червоний ніс. Отже, Джонс п'є багато віскі.

2) Якщо капіталовкладення залишаться сталими, то зростуть урядові витрати, або виникне безробіття. Якщо урядові витрати не зростуть, то податки будуть знижені. Якщо податки будуть знижені і капіталовкладення залишаться сталими, то безробіття не виникне. Отже, урядові витрати зростуть.

3) Якщо йде дощ, то або ми нікуди не підемо, або ми підемо в кіно. Якщо ми підемо в кіно, то в кіно є квитки. Квитків у кіно нема. Отже, якщо піде дощ, то ми нікуди не підемо.

4) Студентка К або перевтомилася, або є хворою. Якщо К перевтомлюється, то вона стає роздратованою. Але К не роздратована. Отже, вона хвора.

5) Якщо Олександра переможе на виборах, вона буде задоволена, а якщо вона буде задоволена, то вона поганий борець у передвиборчій кампанії. Але якщо вона програє на виборах, то втратить довіру партії. Олександра поганий борець у передвиборчій кампанії, якщо вона втратить довіру партії. Якщо вона поганий борець у передвиборчій кампанії, вона повинна вийти з партії. Олександра або переможе на виборах, або програє. Отже, вона повинна вийти з партії.

6) Якщо я поїду автобусом, а автобус запізниться, то я пропущу важливу зустріч. Якщо я пропущу зустріч і це мене засмутить, мені не варто їхати додому. Якщо я не отримаю цю роботу, то це мене засмутить і мені не варто буде їхати додому. Отже, якщо я поїду автобусом і автобус запізниться, то я отримаю цю роботу.

2.2. Перевірити сумісність множин тверджень.

1) Якщо курс цінних паперів росте чи відсоткова ставка знижується, то або падає курс акцій, або податки не підвищуються. Курс акцій знижується тоді й тільки тоді, коли росте курс цінних паперів і податки підвищуються. Якщо відсоткова ставка знижується, то або курс акцій не знижується, або курс цінних паперів не росте. Або податки підвищуються, або курс акцій падає і знижується відсоткова ставка.

2) Договір буде виконано тільки в тому випадку, якщо будинок буде добудований у жовтні. Якщо ми добудуємо будинок у жовтні, то ми зможемо переїхати 1 листопада. Якщо ми не зможемо переїхати 1 листопада, то ми повинні будемо внести квартплату за листопад. Якщо договір не буде виконано, то ми повинні будемо внести квартплату за листопад. Ми не платитимемо квартплату за листопад.

2.3. Серед речень $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \wedge \neg\mathbf{A}$ вказати ті, що є логічними наслідками з множини $\{(\mathbf{C} \to \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{C} \vee \mathbf{B}), \mathbf{C} \to \mathbf{B}\}$.

2.4. Довести, що для довільних речень F_1, F_2, F_3 логіки висловлювань мають місце такі співвідношення логічного наслідку:

- modus ponens: $F_1, F_1 \to F_2 \models F_2$;

- правило силогізму: $F_1 \to F_2,\ F_2 \to F_3 \models F_1 \to F_3$.

2.5. Для яких n речення

$$F_n(x) = (\dots((((x \to \neg x) \to x) \to \neg x) \to x) \to \dots)$$

, що містить n знаків імплікації, є тавтологією?

2.6. Для яких n речення

$$F_n(x) = (\dots((((x \leftrightarrow \neg x) \leftrightarrow x) \leftrightarrow \neg x) \leftrightarrow x) \leftrightarrow \dots)$$

, що містить n знаків еквіваленції, є тавтологією?

2.7. Нехай $F_1,\dots,F_n,G,H$ — довільні речення логіки висловлювань. Довести, що коли $\{F_1,\dots,F_n,G\} \models H$ і $\{F_1\dots,F_n,\neg G\} \models H$, то $\{F_1,\dots,F_n\} \models H$.

2.8. Нехай $F_1,\dots,F_n,G,H$ — довільні речення логіки висловлювань. Довести, що коли $\{F_1,\dots,F_n,G\} \models H$, то $\{F_1\dots,F_n,\neg H\} \models$ $\models \neg G$.

2.9. Нехай $F_1,\dots,F_n,G,H$ — довільні речення логіки висловлювань. Довести, що коли $\{F_1,\dots,F_n,G\} \models H$, то $\{F_1,\dots,F_n\} \models$ $\models G \to H$.

2.10. Нехай F_1 і F_2 — довільні речення логіки висловлювань. Довести, що співвідношення $F_1 \equiv F_2$ має місце тоді й тільки тоді, коли $F_1 \leftrightarrow F_2$ є тавтологією.

2.11. Розставити дужки в еквівалентностях:

1) $\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{A}$;

2) $\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \equiv \mathbf{C} \wedge \neg\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to D$.

Додаткові задачі

2.12. На далекій планеті мешкають дві раси. Представники однієї завжди говорять тільки правду, представники іншої — завжди брешуть. Турист зупинився біля двох аборигенів і запитав у першого: «Ви завжди говорите тільки правду?» Той відповів: «Каліфінк-каліфінк». «Він сказав „так"», — пояснив другий, — «але він страшний брехун». До якої раси належить кожен з аборигенів?

Домашнє завдання

2.13. Запишіть мовою логіки висловлювань та перевірте істинність міркувань.

1) Якщо 2 — просте число, то це найменше просте число. Якщо 2 найменше просте число, то 1 не просте число. Число 1 не є простим. Отже, 2 — просте число.

2) Або Аня та Ваня одного віку, або Аня старша за Ваню. Якщо Аня та Ваня одного віку, то Оксана та Ваня не одного віку. Якщо Аня старша за Ваню, то Ваня старший за Віктора. Отже, або Оксана та Ваня не одного віку, або Ваня старший за Віктора.

2.14. Довести, що для довільних речень F_1,F_2 логіки висловлювань має місце таке співвідношення логічного наслідку:

- $F_1 \to F_2, \neg F_2 \models \neg F_1$ (modus tollens).

2.15. Позначимо через $\star$ будь-яку з логічних зв'язок $\wedge$,$\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Довести, що якщо $F_1 \equiv G_1$ і $F_2 \equiv G_2$, то $F_1 \star F_2 \equiv G_1 \star G_2$. Далі, якщо $F_1 \equiv G_1$, то $\neg F_1 \equiv \neg G_1$.

2.16. Довести еквівалентність формул: $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C} \equiv \neg((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \neg \mathbf{C})$.

Література.

[**3**, с. 9–12]

Заняття № 3. Логічні виводи 1

Теоретичні відомості

ОЗНАЧЕННЯ 3.1 (процедура логічного виводу в логіці висловлювань). *Послідовність речень* $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n$ *називається логічним виводом речення* $\mathbf{A}$ *з множини речень* $\mathfrak{M}$, *якщо для кожного номера і речення* $\mathbf{A}_i$ *задовольняє одну з таких умов*:

1) $\mathbf{A}_i$ *— аксіома логіки висловлювань* (3.2).

2) $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{M}$.

3) Існують номери $j < i$ *та* $k < i$ *такі,що* $\mathbf{A}_j = (\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_i)$. *(У цьому випадку кажуть, що* $\mathbf{A}_i$ *одержане з* $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_i$ *та* $\mathbf{A}_k$ *за правилом modus ponens*[1] *(його справедливість була доведена в задачі* 2.4*).*

4) $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$.

Якщо такий вивід існує, кажуть, що $\mathbf{A}$ *виводиться з множини* $\mathfrak{M}$, *і пишуть* $\mathfrak{M} \vdash \mathbf{A}$.

У задачах (1.6) та (1.19) вже було перевірено, що аксіоми логіки висловлювань є тавтологіями. Наведемо тут список цих аксіом, які використовуватимуться для процедури логічного виводу.

АКСІОМИ 3.2 (аксіоми логіки висловлювань).

(A1) $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;

(A2) $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;

(A3) $\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

(A4) $\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

(A5) $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C}))$;

(A6) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(A7) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

(A8) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))$;

(A9) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A})$;

[1]часто ми використовуватимемо скорочення для «modus ponens» – m.p.

(A10) $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Зауваження 3.3. В аксіомах не фігурує сполучник $\leftrightarrow$, який ми використовували в попередніх заняттях та оголосили частиною алфавіту логіки висловлювань. Тут і надалі ми вважаємо вираз $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ скороченням для $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$.

Приклад 3.4. *У цьому прикладі виконаємо вивід твердження, яке використовуватимемо в подальших виводах і називатимемо лемою*:

$$\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{A}$$

.

Розв'язання ✎. Щоб одержати в результаті виводу шуканий вислів за правилом modus ponens, ми маємо обрати аксіому, в правій дужці якої стоїть конструкція вигляду $F_1 \to F_2$ і покласти в ній $F_1 = F_2 = \mathbf{A}$. Таких аксіом у нас є дві — 1 та 2. Очевидно, що перша аксіома закоротка і ми опинимось у початковій ситуації, тому спробуємо застосувати аксіому 2:

$\underbrace{(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))}_{\text{аксіома (A1)}} \to (\underbrace{(\mathbf{A} \to \mathbf{B})} \to \underbrace{(\mathbf{A} \to \mathbf{A})}_{\text{шукане речення}})$.

Звернемо увагу на те, що ми поки що залишили речення $\mathbf{B}$ незмінним (хоча воно не фігурує в шуканому твердженні), відмітивши в такий спосіб, що його можна замінити на будь-який зручний для нас вислів.

Для того щоб застосувати правило modus ponens необхідно отримати в процесі виводу вислів, який стоїть у перших дужках — $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$. Але він збігається з аксіомою A1. Отже, за правилом modus ponens відкинемо першу дужку і отримаємо

$\underbrace{(\mathbf{A} \to \mathbf{B})} \to \underbrace{(\mathbf{A} \to \mathbf{A})}$.

Але $\mathbf{B}$ ми можемо замінити на будь-який вислів. Щоб одержати в першій дужці аксіому, замінимо $\mathbf{B}$, наприклад, на $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$:

$\underbrace{(\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A}))} \to \underbrace{(\mathbf{A} \to \mathbf{A})}$.

Тепер у першій дужці стоїть аксіома 1, в якій $\mathbf{B}$ замінено на $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})$.

Отже, за правилом modus ponens, відкидаємо першу дужку і одержуємо

$\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Що і треба було довести.

Коректним записом цього розв'язку буде така послідовність:
(A2): $(\mathbf{A} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A})) \to ((\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A}))$;
(A1): $\mathbf{A} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A})$;
modus ponens: $(\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})$;
(A1): $(\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A}))$;
modus ponens: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Зауваження 3.5. Ми можемо замінювати атомарні висловлювання в аксіомах на будь-які зручні для нас вирази, але тільки до моменту застосування до них правила modus ponens. Хоча в неформальному записі цього виводу може видатись, що ми виконуємо заміну після застосування modus ponens. Насправді це не так — неформальний запис показує хід думки, тобто чому саме ми робимо такі заміни. В коректному записі видно, що всі вони відбуваються при введенні аксіоми.

Теорема 3.6 (теорема дедукції). *Для виводу твердження* $\Gamma \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *достатньо побудувати вивід твердження* $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}$.

Зауважимо, що доведення теореми дедукції є конструктивним, тобто його можна використати для відновлення формального виводу без використання теореми дедукції. Наведемо алгоритм переходу від виводу із застосуванням теореми дедукції до виводу без її застосування.

Алгоритм 3.7. *Нехай є задача виконати вивід твердження*

$$\Gamma \vdash F_1 \to F_2.$$

Застосувавши теорему дедукції, переконуємося, що нам достатньо виконати вивід твердження

$$\Gamma \cup F_1 \vdash F_2.$$

Нехай $\mathbf{B}_1$,...,$\mathbf{B}_n$ *— вивід такого твердження. За означенням формального виводу, в такому випадку* $\mathbf{B}_n = F_2$.

Кожне $\mathbf{B}_i$ *послідовно замінимо за такими правилами.*

1) Якщо $\mathbf{B}_i$ *— аксіома або речення з множини* Γ, *то запишемо*

$$\begin{array}{lll} & \mathbf{B}_i; & \\ (A1) & \mathbf{B}_i & \to F_1 \to \mathbf{B}_i; \\ m.p. & F & \to \mathbf{B}_i. \end{array}$$

2) Якщо $\mathbf{B}_i = F_1$, *запишемо (вивід речення)*[2]

$$(\textit{лема}\ 3.4)\ F_1 \to F_1.$$

3) Якщо $\mathbf{B}_i$ *було одержано за правилом modus ponens із попереднього речення* $\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_k \to \mathbf{B}_i$, *запишемо*

(12) (A2) $(F_1 \to \mathbf{B}_j) \to ((F_1 \to \mathbf{B}_k) \to (F_1 \to \mathbf{B}_i))$;

(13) *m.p.* $(F_1 \to \mathbf{B}_k) \to (F_1 \to \mathbf{B}_i)$;

(14) *m.p.* $F_1 \to \mathbf{B}_i$.

Зауважимо, що вираз (12) *справді є другою аксіомою, оскільки* $(F_1 \to \mathbf{B}_j) = (F_1 \to (\mathbf{B}_k \to \mathbf{B}_i))$. *Переходи від* (12) *до* (13) *та від* (13) *до* (14) *ми маємо право робити за правилом modus ponens, оскільки* $j < i$, $k < i$, *а за цим попередні речення виводу вже перетворили на* $F_1 \to \mathbf{B}_r\ \forall r < i$.

Оскільки цей алгоритм повністю покриває всі можливості для $\mathbf{B}_i$ *(за означенням логічного виводу), то в результаті одержимо коректний вивід без використання теореми дедукції, а оскільки алгоритм буде застосовано для всіх кроків, то на останньому дістанемо* $F_1 \to \mathbf{B}_n = F_1 \to F_2$, *що й треба було вивести.*

Такий алгоритм, застосований безпосередньо, майже завжди дасть «зайві» кроки.

Зауваження 3.8. Ще раз перелічимо інструментарій, який можна використовувати в процесі логічного виводу:

- аксіоми логіки висловлювань (A1)-(A10) з (3.2);
- правило modus ponens з (2.4);
- теорема дедукції (у випадках, коли її застосування не заборонено умовою).

Більше нічого використовувати не дозволяється — за означенням формального виводу.

Приклад 3.9. *Довести твердження*

$$\vdash \neg(\mathbf{A} \lor \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{A} \land \neg\mathbf{B}).$$

[2]Формально кажучи, використовувати лему у виводі ми не маємо права. Але коли ми кажемо, що пишемо не лему, а вивід леми (який, звичайно, завжди можемо відтворити), то залишаємось у рамках означення.

Розв'язання ✎. За теоремою дедукції нам достатньо побудувати формальний вивід твердження:

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$.

Поставимо собі за мету одержати результат з аксіоми A8 із такою заміною, щоб праворуч стояв шуканий вираз. $\mathbf{A}$ замінимо на X, щоб показати, що замість нього ми зможемо поставити будь-який зручний для нас вираз:

$$(X \to \neg\mathbf{A}) \to ((X \to \neg\mathbf{B}) \to (X \to (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})). \tag{15}$$

Вирази вигляду $X \to \neg\mathbf{A}$ та $X \to \neg\mathbf{B}$ логічно одержувати з аксіоми A1. Але для цього спочатку потрібно одержати власне $\neg\mathbf{A}$ та $\neg\mathbf{B}$.

В аксіомі A9 праворуч стоїть $\neg\mathbf{A}$. Спробуємо застосувати її, замінивши $\mathbf{B}$ на поки що невідомий нам Y:

$(\mathbf{A} \to Y) \to ((\mathbf{A} \to \neg Y) \to \neg\mathbf{A})$.

Замінивши Y на $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ одержимо

$$\underbrace{(\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B})}_{\text{аксіома (A3)}} \to (\,\underbrace{(\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))} \to \neg\mathbf{A}). \tag{16}$$

У перших дужках стоїть аксіома A3, а другу можна дістати з аксіоми A1, оскільки $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ — речення нам відоме після застосування теореми дедукції:

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))$;

modus ponens: $\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

Застосувавши правило modus ponens до (16) двічі, одержимо $\neg\mathbf{A}$.

Аналогічно маємо

$(\mathbf{B} \to Y) \to ((\mathbf{B} \to \neg Y) \to \neg\mathbf{B})$.

Замінивши Y на $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ знайдемо:

$$\underbrace{(\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B})}_{\text{аксіома (A4}} \to (\,\underbrace{(\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))} \to \neg\mathbf{B}). \tag{17}$$

У перших дужках тепер стоїть аксіома A4, а другу дістанемо способом, наведеним вище:

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))$;

modus ponens: $\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

Застосувавши правило modus ponens до (17) двічі, одержимо $\neg\mathbf{B}$.

Застосовуючи аксіому A1, маємо для довільного виразу X:

$\neg\mathbf{A} \to (X \to \neg\mathbf{A})$ modus ponens $X \to \neg\mathbf{A}$

та

$\neg\mathbf{B} \to (X \to \neg\mathbf{B})$ modus ponens $X \to \neg\mathbf{B}$.

Повернемось до виразу (15):

$\underbrace{(X \to \neg\mathbf{A})} \to (\underbrace{(X \to \neg\mathbf{B})} \to (X \to (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}))$.

Першу і другу дужки ми щойно одержали. Отже, modus ponens $X \to (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$.

Але X — це «вільна» частина наших міркувань, яку можемо замінити на довільний вираз, наприклад, $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, відомий нам за умовою:

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$;

modus ponens $\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$. Вивід завершено.

Коректний запис цього виводу:

Т.Д.[3] $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(A8): $(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A}) \to ((\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \neg\mathbf{B}) \to (\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to$
$\to (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}))$;

(A9): $(\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \to \neg\mathbf{A})$;

(A3): $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

modus ponens: $(\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \to \neg\mathbf{A}$;

(A1): $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))$;

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

modus ponens: $\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

modus ponens: $(\mathbf{A} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \to \neg\mathbf{A}$;

modus ponens: $\neg\mathbf{A}$;

(A 9): $(\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to ((\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \to \neg\mathbf{B})$;

(A 4): $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

modus ponens: $(\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \to \neg\mathbf{B}$;

(A 1): $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))$;

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

modus ponens: $\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

modus ponens: $(\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \to \neg\mathbf{B}$;

modus ponens: $\neg\mathbf{B}$;

modus ponens: $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$;

modus ponens: $\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$.

[3]скорочений запис для «теореми дедукції».

Основні задачі

3.1. Доведіть, що для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$

1) $\vdash (\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;

2) $\vdash \mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}$.

3.2. Доведіть (не використовуючи теорему дедукції), що для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$

1) $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$;

2) $\vdash (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$.

3.3. Доведіть, що для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$

1) $\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A})$;

2) $\vdash \mathbf{A} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B})$;

3) $\vdash (\neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$.

Ці твердження виділено в окрему задачу, оскільки вони використовуються для доведення важливих тверджень, таких як лема Ка́льмара.

3.4. Побудуйте вивід тверджень:

1) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$;

2) $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$;

3) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \vdash (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$;

4) $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \vdash (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$;

5) $\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \vdash \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$;

6) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

7) $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Додаткові задачі

3.5. Побудуйте якомога коротший логічний вивід речення (не використовуючи теорему дедукції)
$\vdash (\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$
для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$.

3.6. Порахуйте, як може змінитись кількість кроків при прямому застосуванні алгоритму 3.7 для переходу від виводу із застосуванням теореми дедукції до «чистого» виводу.

Домашнє завдання

3.7. Доведіть, що для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$

1) $\vdash \neg\mathbf{A} \to (\neg\mathbf{B} \to \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))$;

2) $\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B}))$.

Ці речення також використовуються для доведення Леми Кальмара та інших важливих тверджень.

Література.

[**3**, с. 13–18]; [**4**, с. 36–45].

Заняття № 4. Логічні виводи 2

Основні задачі

4.1. Побудуйте вивід тверджень:

1) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$;

2) $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$;

3) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$;

4) $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \vdash (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$;

5) $\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \vdash \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$;

6) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

7) $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

4.2. Доведіть, що для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$

1) $\vdash (\mathbf{C} \to \mathbf{A}) \vee (\mathbf{C} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

2) $\vdash \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$;

3) $\vdash (((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A})$;

4) $\vdash ((\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to \mathbf{C}) \to ((((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to \mathbf{C}) \to (((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to$
$\to \mathbf{C})) \to \mathbf{C})$.

Домашнє завдання

4.3. Доведіть (не використовуючи теорему дедукції), що для довільних речень $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$

1) $\mathbf{A} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B})$;

2) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$.

Література.

[**3**, с. 13–18]; [**4**, с. 36–45].

Розділ 2

Логіка відношень

Заняття № 5. Предикати. Квантори. Речення

Неформальна теорія

Означення 5.1. *Вільною змінною речення F логіки відношень називається така змінна, від якої речення F залежить.*

Означення 5.2. *Дія квантора на речення визначається неформально в такий спосіб:*

$$\forall x_i F(x_1,...,x_n) = \min_{x_i} (F(x_1,...,x_n)), \tag{18}$$

$$\exists x_i F(x_1,...,x_n) = \max_{x_i} (F(x_1,...,x_n)). \tag{19}$$

Звідси легко бачити, що предикат $Qx_iF(x_1,...,x_n)$ залежить вже від n-1 змінної — змінна x_i «вирізається» квантором Q.

Формальна теорія та приклади

Означення 5.3.

1. *Алфавіт $\mathfrak{A}$ логіки відношень складається з* 12 *літер*:

$$\mathrm{p,v,f,|,}\neg, \to , \vee , \wedge ,\forall,\exists,(,).$$

2. *Змінною називається слово в алфавіті $\mathfrak{A}$, побудоване за такими правилами*:
   1) *слово, яке складається з однієї літери* v, *є змінною*;
   2) *якщо слово* w *є змінною, то й слово* w| *є змінною*;
   3) *інших змінних, крім тих, які можуть бути побудовані за правилами* (a),(b), *не існує.*

Фактично це означення зводиться до того, що змінними є слова вигляду $\mathrm{v}|| \ldots |$ *(*n *символів* $|$; *можливо* $n = 0$*). Скорочено таке слово позначатимемо* v_n.

3. *Предикатом називається слово в алфавіті* $\mathfrak{A}$, *побудоване за такими правилами:*

   (a) *слово, яке складається з однієї літери* p, *є предикатом;*

   (b) *якщо слово* P *є предикатом, то й слова* $|P$ *та* $P|$ *є предикатами;*

   (c) *інших предикатів, крім побудованих за правилами* (a), (b), *не існує.*

   Знов-таки, предикати — це слова вигляду $\underbrace{|| \ldots |}_{m}\mathrm{p}\underbrace{|| \ldots |}_{n}$, *які скорочено позначаються* p_n^m. *Число* m *називають місністю предиката* p_n^m. *Нульмісні предикати* p_n^0 *називають (сталими) висловлюваннями.*

4. *Функціоналом називається слово в алфавіті* $\mathfrak{A}$, *побудоване за такими правилами:*

   (a) *слово, яке складається з однієї літери* f, *є функціоналом;*

   (b) *якщо слово* F *є функціоналом, то й слова* $|F$ *та* $F|$ *є функціоналами;*

   (c) *інших функціоналів, крім побудованих за правилами* (a),(b), *не існує.*

   Знов-таки, функціонали — це слова вигляду $\underbrace{|| \ldots |}_{m}\mathrm{f}\underbrace{|| \ldots |}_{n}$, *які скорочено позначаються* f_n^m. *Число* m *також називають місністю функціонала* f_n^m. *Нульмісні функціонали* f_n^0 *називаються константами.*

5. *Термом називається слово в алфавіті* $\mathfrak{A}$, *побудоване за такими правилами:*

   (a) *змінна є термом;*

   (b) *якщо* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *— терми, а* F *—* m*-місний функціонал, то* $Ft_1t_2 \ldots t_m$ *— терм;*

(*c*) *інших термів, крім побудованих за правилами* (*a*),(*b*), *не існує.*

Для виразності замість $Ft_1t_2\dots t_m$ *писатимемо* $F(t_1,t_2,\dots,t_m)$.

6. *Атомом або елементарним реченням називається слово в алфавіті* $\mathfrak{A}$, *яке має вигляд* $Pt_1t_2\dots t_m$, *де* P — *деякий* m-*місний предикат, а* $t_1,t_2,\dots,t_m$ — *деякі терми (якщо* $m = 0$, *це слово має вигляд* P, *без переліку термів). Знов-таки, для виразності ми писатимемо* $P\,(t_1,t_2,\dots,t_m)$ *замість* $Pt_1t_2\dots t_m$.

7. *Реченням логіки відношень називається слово в алфавіті* $\mathfrak{A}$, *побудоване за такими правилами*:

   (*a*) *кожен атом є реченням*;

   (*b*) *якщо* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ — *речення, то* $\neg\mathbf{A}$, $(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\to\mathbf{B})$, — *теж речення*;

   (*c*) *якщо* $\mathbf{A}$ — *речення, а* x — *змінна, то* $\forall x\mathbf{A}$ *і* $\exists x\mathbf{A}$ — *теж речення*;

   (*d*) *інших речень, крім побудованих за правилами* (*a*), (*b*), (*c*), *не існує.*

Означення 5.4.

1. *Інтерпретація* $\mathcal{I}$ *логіки відношень складається з таких частин*:

   1) *деякої непорожньої множини* $M = M(\mathcal{I})$, *яка називається областю інтерпретації* $\mathcal{I}$;

   2) *відображення, яке кожному* m-*місному предикату* P *ставить у відповідність функцію* $\mathcal{I}(P){:}M^m\to\mathbb{B}$ *(зокрема, якщо* $m = 0$, $\mathcal{I}(P)\in\mathbb{B}$ — *булева стала)*;

   3) *відображення, яке кожному* m-*місному функціоналу* F *ставить у відповідність функцію* $\mathcal{I}(F){:}M^n\to M$ *(зокрема, якщо* $m = 0$, $\mathcal{I}(F)\in M$ — *фіксований елемент).*

2. *Розподілом (в інтерпретації* $\mathcal{I}$*) називається відображення* $\phi{:}\mathfrak{X}\to M$, *де* $\mathfrak{X}$ — *множина змінних.*

3. *Якщо* ϕ *— розподіл, а* x *— змінна, то через* ϕ^x *позначається множина всіх таких розподілів* ψ, *що* $\psi(y) = \phi(y)$ *для всіх змінних* $y \neq x$.

4. *Значення* $\phi(t)$ *терма* t *на розподілі* ϕ *визначається такими правилами.*

   1) *Якщо* $t = \mathrm{v}_n$, *то* $\phi(t) = \phi(\mathrm{v}_n)$.
   2) *Якщо* $t = Ft_1t_2\dots t_m$, *де* F *—* m*-місний функціонал, то* $\phi(t) = \mathcal{I}(F)(\phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_m))$.

5. *Значення* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A})$ *речення* $\mathbf{A}$ *на розподілі* ϕ *в інтерпретації* $\mathcal{I}$ *визначається такими правилами.*

   1) *Якщо* $\mathbf{A} = Pt_1t_2\dots t_m$ *— елементарне речення, то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \mathcal{I}(P)(\phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_m)).$$

   2) *Якщо* $\mathbf{A} = \neg\mathbf{B}$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = 1; \\ 1, & \textit{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = 0. \end{cases}$$

   3) *Якщо* $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{C}) = 0; \\ 1, & \textit{в іншому разі.} \end{cases}$$

   4) *Якщо* $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{C}) = 1; \\ 0, & \textit{в іншому разі.} \end{cases}$$

   5) *Якщо* $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$, *то*

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = 1, \textit{ а } \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{C}) = 0; \\ 1, & \textit{в іншому разі.} \end{cases}$$

   6) $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\forall x\mathbf{A}) = \min\{\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,\mathbf{A}) | \psi \in \phi^x\}$.
   7) $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\exists x\mathbf{A}) = \max\{\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,\mathbf{A}) | \psi \in \phi^x\}$.

В останніх двох рядках вважаємо, як завжди, що $0 < 1$. *Тому фактично* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\forall x\mathbf{A}) = 1$ *тоді й лише тоді, коли* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,\mathbf{A}) = 1$ *для кожного розподілу* ψ, *який відрізняється від* ϕ *щонайбільше значенням на змінній* x, *а* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\exists x\mathbf{A}) = 1$ *тоді й лише тоді, коли* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = 1$ *принаймні для одного з таких розподілів.*

Означення 5.5. *Областю істинності предиката* P *називається множина інтерпретацій* $\mathcal{I}$, *в якій* P *набуває істинних значень.*

Приклад 5.6. *На множині* $M = \{1,2,3\}$ *таблицями значень задамо предикати* $P_1(x_1,x_2), P_2(x_1)$:

$\mathbf{P_1(x_1,x_2)}$			
x_1	x_2		
	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	1	1

x_1	$\mathbf{P_2(x_1)}$
1	1
2	1
3	0

Побудувати таблицю значень предиката $\exists x_2(P_2(x_2) \to P_1(x_1,x_2))$.

Розв'язання ✎. Наведений предикат залежить від єдиної змінної — x_1. Побудуємо таблицю спочатку для виразу в дужках $Q_1(x_1,x_2) = P_2(x_2) \to P_1(x_1,x_2)$, а потім застосуємо квантор існування $Q_2(x_1) = \exists x_2(Q_1)$:

$\mathbf{Q_1(x_1,x_2)}$			
x_1	x_2		
	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	0	1	1

x_1	$\mathbf{Q_2(x_1)}$
1	1
2	1
3	1

На прикладі першої графи подивимось, як заповнювалась таблиця $Q_1(x_1,x_2)$:

$$Q_1(1,1) = P_2(1) \to P_1(1,1) = 1 \to 0 = 0;$$
$$Q_1(1,2) = P_2(1) \to P_1(1,2) = 1 \to 1 = 1;$$
$$Q_1(1,3) = P_2(1) \to P_1(1,3) = 1 \to 0 = 0.$$

Приклад 5.7. *На множині натуральних чисел із нулем задано предикат*

$$S(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad x_1 + x_2 = x_3; \\ 0, & \textit{в іншому разі} \end{cases}$$

Використовуючи тільки цей предикат та інструментарій логіки відношень записати твердження «дія додавання натуральних чисел комутативна».

Розв'язання ✎. Спочатку запишемо твердження у звичайній алгебраїчній формі.

$$\text{Для всіх } a,b \text{ виконується } a + b = b + a.$$

У нас немає предиката, що визначає рівність. Але ми можемо порахувати суму $a + b = x_1$ і за допомогою предиката S записати, що сума $b + a$ також дорівнює x_1:

$$\underbrace{S(a,b,x_1)}_{a+b=x_1} \to \underbrace{S(b,a,x_1)}_{b+a=x_1}.$$

Залишилось розставити квантори. Оскільки наше твердження має виконуватись для всіх натуральних чисел, зрозуміло, що це будуть квантори довільності (якщо твердження хибне хоч для одного натурального числа, то таким буде і наше речення). Тому відповідь виглядає і читається таким чином:

$$\forall a \forall b \forall x_1 (S(a,b,x_1) \to S(b,a,x_1)),$$

$$\underbrace{\forall a \forall b}_{\text{Для всіх } a \text{ і } b} \quad \underbrace{\forall x_1}_{\text{і для всіх } x_1 \text{ таких, що}} \quad (\underbrace{S(a,b,x_1)}_{a+b=x_1} \quad \underbrace{\to}_{\text{виконується}} \quad \underbrace{S(b,a,x_1)}_{b+a=x_1}).$$

Основні задачі

5.1. Запишіть речення мовою логіки предикатів.

1. Не всі птахи вміють літати.

2. Ви можете обманювати декого весь час, ви можете обманювати всіх деякий час, але ви не можете обманювати всіх і весь час.

3. Кожний, у кому є впертість, може вивчити математичну логіку.

5.2. Які з наведених виразів є предикатами?

1) $y = x^2$ (x, y належать множині дійсних чисел).

2) x — мати y (x, y належать множині людей).

3) x і y (x, y належать множині людей).

5.3. f -одномісний, g — двомісний, h — тримісний функціонали. x,y,z — змінні. Визначити, які з виразів є термами.

1) $f(g(x,y))$.

2) $g(f(z,h(x,y,z)))$.

3) $f(g(x))$.

4) $h(x,y,z)$.

5.4. Предикат $P(x,y)$ задано на множині $\{a,b\}$ таблично:

x	a	a	b	b
y	a	b	a	b
$P(x,y)$	0	1	1	1

.

Обчисліть значення формул:

1) $\forall x P(x,a), \exists x P(x,a), \forall y P(a,y), \exists y P(a,y)$;

2) $\forall x P(x,b), \exists x P(x,b), \forall y P(b,y), \exists y P(b,y)$;

3) $\forall x \forall y P(x,y), \forall x \exists y P(x,y), \forall y \exists x P(x,y), \exists y \forall x P(x,y)$;

4) $\forall y \forall x P(x,y), \exists x \forall y P(x,y), \exists x \exists y P(x,y), \exists y \exists x P(x,y)$.

5.5. Нехай предикати $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ над множиною $M = \{a,b,c,d\}$ задано таблицями значень:

x	a	b	c	d
$P(x)$	1	1	0	1
$Q(x)$	0	1	0	0
$R(x)$	1	1	1	1

.

Побудувати таблиці значень предикатів:

1) $\forall x_2(P(x_2) \to Q(x_1)) \wedge \exists x_2 R(x_2)$;

2) $\exists x_1((\forall x_1(P(x_1) \to Q(x_1))) \leftrightarrow R(x_1)$;

3) $\exists x_2 \forall x_3(\forall x_1 P(x_1) \to (R(x_2) \wedge Q(x_3)))$.

5.6. Предикати $P_1(x_1,x_2)$,$P_2(x_1,x_2)$,$P_3(x_1)$ задано на множині $M = \{a,b,c\}$ таблицями значень:

$\mathbf{P_1(x_1,x_2)}$			
x_1	x_2		
	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	0
c	0	1	1

$\mathbf{P_2(x_1,x_2)}$			
x_1	x_2		
	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	1
c	0	0	1

x_1	$\mathbf{P_3(x_1)}$
a	1
b	0
c	1

,

Побудувати таблицю значень предикатів:

1) $\exists x_1 P_3(x_1) \to (\exists x_2 \forall x_1 P_1(x_1,x_2))$;

2) $\forall x_1 P_2(x_1,x_2) \vee (\exists x_2 \neg P_3(x_2))$;

3) $\forall x_1 \exists x_2(\forall x_1 P_3(x_1) \to (\exists x_2 P_1(x_1,x_2) \vee \forall x_1 P_2(x_1,x_2)))$.

5.7. На множині $\mathbb{N}_0$ всіх натуральних чисел з нулем вибрано такі атомарні предикати:

$$S(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 + x_2 = x_3; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

$$D(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 x_2 = x_3; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Яким буде значення в такій інтерпретації речень:

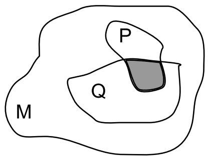
1) $\exists y \forall x S(x,y,x)$;

2) $\exists y \forall x D(x,y,x)$;

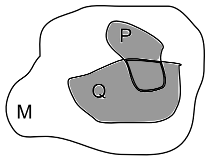
3) $\forall z \forall x \exists y S(x,y,z)$;

4) $\forall z \forall x \exists y D(x,y,z)$.

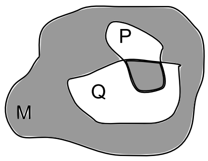
5.8. Нехай предикати P,Q визначено на множині точок площини M. Область істинності нового предиката зафарбовано. Визначте, яким предикатам відповідають такі рисунки:



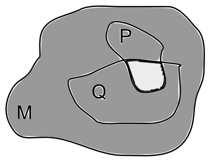
а)



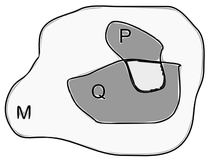
б)



в)



г)



д)

5.9. Предикати S,D задано так само, як у задачі 5.7.

Запишіть такі твердження у вигляді речень, що містять лише предикатні символи S, D.

1) Дія додавання натуральних чисел асоціативна.

2) Добуток двох парних чисел є парним числом.

3) Кожне парне число є сумою трьох простих чисел.

4) Множина простих чисел-близнюків скінченна[1].

5.10. Записати мовою логіки предикатів твердження: система рівнянь $f_1(x,y) = 0$; $f_2(x,y) = 0$ несумісна.

5.11. Область інтерпретації $\mathcal{I}$ — множина фігур на площині. Предикатам $P(x)$, $Q(x)$, $R(x,y)$, $S(x,y)$ відповідають відношення $\mathcal{I}(P)$: «x — точка», $\mathcal{I}(Q)$: «x — пряма», $\mathcal{I}(R)$: $x \in y$, $\mathcal{I}(S)$: $x = y$.

[1] Числа-близнюки — це такі прості числа, різниця між якими дорівнює 2.

1) Яке значення в цій інтерпретації має речення

$$\forall x(Q(x) \to \exists y(Q(y) \wedge \neg\exists z(P(z) \wedge R(z,x) \wedge R(z,y)) \wedge$$
$$\wedge \forall t(Q(t) \wedge \neg\exists z(P(z) \wedge R(z,x) \wedge R(z,t)) \to S(y,t)))?$$

2) Напишіть речення $\mathbf{A}$, таке що $\operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = 1$ тоді й лише тоді, коли $\phi(x) = X$, $\phi(y) = Y$, $\phi(z) = Z$, $\phi(t) = T$ — точки, причому прямі XY та ZT непаралельні.

5.12. Область інтерпретації $\mathcal{I}$ — множина дійсних чисел. Предикатам $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ відповідають відношення $\mathcal{I}(P)$: «точка з координатами (x,y) належить кругу радіуса 4 з центром (1,0)» та $\mathcal{I}(Q)$: «точка з координатами (x,y) належить тій півплощині з границею $x + y = 1$, яка не містить початку координат». При яких значеннях $X = \phi(x)$

(a) $\operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = 1$, де $\mathbf{A} = \forall y(P(x,y) \to Q(x,y))$;

(b) $\operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = 1$, де $\mathbf{B} = \exists y(P(x,y) \wedge Q(x,y))$?

5.13. На множині $M = \{1,2,3\}$ інтерпретацію $\mathcal{I}$ задамо таблицями:

$\mathcal{I}(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y})$			
x	y		
	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	0	1	1

x	$\mathcal{I}(\mathbf{Q})(\mathbf{x})$
1	1
2	0
3	1

.

Знайдіть значення в цій інтерпретації речення:

1) $\exists y(P(x,y) \to \forall x(\neg Q(y) \vee \exists z(R(z) \vee \neg P(x,z))))$;

2) $\forall x(\exists y Q(y) \vee \exists z \neg R(z)) \to \forall z(R(z) \wedge \exists x \neg P(x,y))$;

3) $\neg\exists y \forall x P(x,y) \wedge \exists z(Q(z) \vee \forall x(P(z,x) \to \neg Q(x)))$.

Додаткові задачі

5.14. Побудувати алгоритм перевірки того, чи є задане слово реченням логіки відношень.

5.15. У таблиці 1 поставте у відповідність кожному реченню з лівої графи формальний запис у правій графі.

a)	Всі судді — юристи	(i)	$(\exists x)(\mathbf{W}(x) \wedge \mathbf{C}(x) \wedge L(x))$
b)	Деякі юристи — шахраї	(ii)	$\neg O(j) \wedge \neg \mathbf{V}(j)$
c)	Жоден із суддів не є шахраєм	(iii)	$\forall x(J(x) \to \neg S(x))$
d)	Деякі судді — старі, але активні	(iv)	$\exists x(\mathbf{W}(x) \wedge L(x) \wedge H(x))$
e)	Суддя Петренко не старий і не активний	(v)	$\forall x(\mathbf{A}(j,x) \to \neg S(x)$
f)	Не всі юристи — судді	(vi)	$\forall x(J(x) \to L(x))$
g)	Деякі юристи, що є одночасно політиками, — члени ради	(vii)	$\neg \forall x(L(x) \to J(x))$
h)	Жоден член ради не є активним	(viii)	$\forall x(\mathbf{C}(x) \wedge O(x) \to L(x))$
i)	Всі старі члени ради — юристи	(ix)	$\exists x(L(x) \wedge S(x))$
j)	Деякі жінки є одночасно юристами та членами ради	(x)	$\exists x(L(x) \wedge P(x) \wedge \mathbf{C}(x))$
k)	Жодна жінка не є одночасно політиком та домогосподаркою	(xi)	$\forall x(\mathbf{W}(x) \to \neg(P(x) \wedge H(x))$
l)	Деякі жінки-юристи є домогосподарками	(xii)	$\forall x(\mathbf{C}(x) \to \neg \mathbf{V}(x))$
m)	Всі жінки-юристи захоплюються кимось із суддів	(xiii)	$\exists x(J(x) \wedge O(x) \wedge \mathbf{V}(x))$
n)	Деякі юристи захоплюються тільки суддями	(xiv)	$\forall x \forall y(\mathbf{A}(y,x) \wedge J(x) \to J(y))$
o)	Деякі юристи захоплюються жінками	(xv)	$\exists x(S(x) \wedge \forall y(\mathbf{A}(x,y) \to \neg L(y))$
p)	Деякі шахраї не захоплюються жодним юристом	(xvi)	$\exists x \exists y(L(x) \wedge S(y) \wedge \mathbf{A}(x,j) \wedge \mathbf{A}(y,j))$
q)	Суддя Петренко не захоплюється жодним шахраєм	(xvii)	$\forall x(\mathbf{W}(x) \wedge L(x) \to \exists y(\mathbf{W}(y) \wedge \mathbf{A}(x,y)))$
r)	Існують і юристи, і шахраї, які захоплюються суддею Петренко	(xviii)	$\exists x(L(x) \wedge \exists y(\mathbf{W}(y) \wedge \mathbf{A}(x,y))$
s)	Тільки судді захоплюються суддями	(xix)	$\forall x(J(x) \to \forall y(\mathbf{A}(x,y) \to J(y))$
t)	Всі судді захоплюються тільки суддями	(xx)	$\exists x(L(x) \wedge \forall y(\mathbf{A}(x,y) \to J(y))$

Таблиця 1. **Таблиця до задачі 5.15**

Домашнє завдання

5.16. Предикат над множиною дійсних чисел визначено таким способом:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x^2 + y^2 = z^2; \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases}$$

Що означають у такому випадку вирази: $F(3,4,5)$; $F(1,2,z)$; $F(x,y,5)$; $\forall x F(3,4,x)$; $\exists y F(1,1,y)$?

5.17. Двомісний предикат над множиною $\mathbb{R}$ задано умовою

$$\begin{cases} P(x,y) & = & 1, \text{ якщо } |x-y| \leq 2; \\ P(x,y) & = & 0, \text{ якщо } |x-y| > 2. \end{cases}$$

Зобразити геометрично область істинності цього предиката.

5.18. Запишіть речення мовою логіки предикатів.

1) Кожен оселедець — риба, але не кожна риба — оселедець.

2) Якщо сонце світить, то це комусь потрібно.

5.19. Побудувати таблицю значень предиката $\exists x_2(\forall x_1 P_1(x_1,x_2) \to$ $\to P_2(x_1,x_2)) \leftrightarrow P_3(x_1)$.

$\mathbf{P_1(x_1,x_2)}$			
x_1	x_2		
	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	1
c	0	1	1

,

$\mathbf{P_2(x_1,x_2)}$			
x_1	x_2		
	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	0	0	0

,

x_1	$\mathbf{P_3(x_1)}$
a	0
b	1
c	1

,

5.20. Нехай на множині точок і прямих площини вибрано предикати $P_1(x)$ — «x — точка», $P_2(x)$ — «x — пряма», $P_3(x_1,x_2)$ — «точка x_1 лежить на прямій x_2». Виразити через них предикати:
а) прямі x_1, x_2 перетинаються;
б) точки x_1,x_2,x_3 лежать на одній прямій;
в) прямі x_1,x_2,x_3 перетинаються в одній точці.

5.21. На множині $M = \{1,2,3\}$ інтерпретацію $\mathcal{I}$ задано таблицями:

$\mathcal{I}(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y})$			
x_1	x_2		
	1	2	3
1	1	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1

x	$\mathcal{I}(\mathbf{Q})(\mathbf{x})$
1	0
2	0
3	1

x	$\mathcal{I}(\mathbf{R})(\mathbf{x})$
1	0
2	1
3	1

Знайдіть значення в цій інтерпретації речення:

1) $\forall x(\exists y Q(x) \vee \exists z \neg R(z)) \to \forall z(R(z) \wedge \exists x \neg P(x,y))$;

2) $\neg \exists y \forall x P(x,y) \wedge \exists z(Q(z) \vee \forall x(P(z,x) \to \neg R(x)))$.

Література.

[**3**, с. 30–35]; [**4**, с. 53–63].

Заняття № 6. Тотожно істинні та виконливі речення

Теоретичні відомості

Означення 6.1. *Нехай* $\mathrm{Q}x$ — *деяке входження квантора* $\forall$ *або* $\exists$ *до речення* $\mathbf{A}$. *Його область визначається такими правилами:*

1) *Якщо* $\mathbf{A} = \mathrm{Q}x\mathbf{B}$ *для деякої змінної* x *та деякого речення* $\mathbf{B}$, *то областю цього квантора є все речення* $\mathbf{A}$; *області дії кванторів, які входили до речення* $\mathbf{B}$, *не змінюються.*

2) *Якщо* $\mathbf{A}$ *має вигляд* $\neg\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\vee\mathbf{C}$, $\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$ *або* $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$, *а* Q *входить до речення* $\mathbf{B}$ $(\mathbf{C})$, *то область квантора* $\mathrm{Q}x$ *в реченні* $\mathbf{A}$ *збігається з областю цього квантора в реченні* $\mathbf{B}$ $(\mathbf{C})$.

3) *Входження змінної* x *до речення* $\mathbf{A}$ *називається вільним, якщо воно не належить області якогось квантора* $\mathrm{Q}x$, *і пов'язаним (квантором* Q*), якщо воно належить такій області.*

4) *Кажуть, що* x — *вільна змінна речення* $\mathbf{A}$, *якщо в цьому реченні є принаймні одне вільне входження змінної* x.

5) *Речення* $\mathbf{A}$ *називається замкненим, якщо в ньому немає жодної вільної змінної.*

6) *Замиканням речення* $\mathbf{A}$ *називається замкнене речення* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \mathbf{A}$, *де* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *усі вільні змінні речення* $\mathbf{A}$, *взяті в порядку своїх номерів (тобто* v_k *іде перед* v_m, *якщо* $k < m$*).*

Означення 6.2. *Речення логіки відношень* F *називається*

- *виконливим, якщо існує інтерпретація* $\mathcal{I}$ *та розподіл* ϕ *такі, що* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,F) = 1$;
- *тотожно істинним в інтерпретації* $\mathcal{I}$ $(\models_{\mathcal{I}} F)$, *якщо на довільному розподілі* ϕ $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,F) = 1$;
- *тотожно істинним на множині* M $(\models_M F)$, *якщо для довільної інтерпретації* $\mathcal{I}$ *з областю* M *та довільного розподілу* ϕ $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,F) = 1$;
- *тотожно істинним* $(\models F)$, *якщо воно тотожно істинне на довільній множині.*

У цьому розділі ми зустрічаємось із двома в деякому сенсі ортогональними питаннями.

1. Чи є речення F виконливим?

   Якщо ми хочемо відповісти на це питання:

   - «так», то необхідно і достатньо навести одну інтерпретацію і розподіл, в яких це речення — істинне;
   - «ні», то необхідно довести, що таких розподілів не існує (оптимально це доводити від супротивного — «нехай існують такі $\mathcal{I}$,ϕ, що $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,F) = 1$», і приходити до протиріччя).

2. Чи є речення F тотожно істинним? Якщо ми хочемо відповісти на це питання:

   - «ні», то необхідно і достатньо навести одну інтерпретацію і розподіл, в яких це речення — хибне;
   - «так», то необхідно довести, що таких розподілів не існує (знов-таки від супротивного — «нехай існують такі $\mathcal{I}$,ϕ, що $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,F) = 0$, і приходити до протиріччя).

Зауваження 6.3. Тому, виконувати перевірку і проводити доведення як у логіці висловлювань нам заважають квантори. Але ми можемо їх позбавлятись за правилами:

- якщо $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\forall xF) = 1$, то для всіх $\psi \in \phi^x$ $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,F) = 1$;
- якщо $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\forall xF) = 0$, то існує $\psi \in \phi^x$ такий, що $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,F) = 0$;
- якщо $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\exists xF) = 1$, то існує $\psi \in \phi^x$ такий, що $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,F) = 1$;
- якщо $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\exists xF) = 0$, то для всіх $\psi \in \phi^x$ $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi,F) = 1$.

Тут і далі позначаємо ϕ^x множину всіх розподілів, які відрізняються від розподілу ϕ тільки на x.

Приклад 6.4. *Довести, що речення є тотожно істинним*:

$$\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \to (P_1(x) \vee P_2(x)).$$

Розв'язання ✎. Припустимо, що це не так. Тобто існує така інтерпретація $\mathcal{I}$ і такий розподіл ϕ, що

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \to \exists x(P_1(x) \vee P_2(x))) = 0.$$

Імплікація хибна, якщо ліворуч в ній стоїть одиниця, а праворуч нуль. Отже,

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x))) = 1; \tag{20}$$

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\exists x(P_1(x) \vee P_2(x))) = 0. \tag{21}$$

Із (20) за правилами з 6.3 одержуємо для кожного розподілу $\psi_1 \in \phi^x$:

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_1(x) \wedge P_2(x)) = 1.$$

Кон'юнкція істинна, якщо обидва вирази істинні. А отже,

$$\begin{aligned}\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_1(x)) = 1;\\ \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_2(x)) = 1.\end{aligned}$$

За тими самими правилами з (21) одержуємо: для кожного розподілу $\psi_2 \in \phi^x$

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_2,P_1(x) \vee P_2(x)) = 0.$$

Диз'юнкція хибна, якщо обидва вирази хибні. Отже,

$$\begin{aligned}\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_2,P_1(x)) = 0;\\ \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_2,P_2(x)) = 0.\end{aligned}$$

Але обидва розподіли ψ_1 та ψ_2 були обрані довільно з множини ϕ^x. Отже оберемо $\psi_2 = \psi_1$ і одержимо:

$$\begin{aligned}\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_1(x)) = 1;\\ \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_2(x)) = 1 \text{ і}\\ \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_1(x)) = 0;\\ \mathrm{val}\,(\mathcal{I},\psi_1,P_2(x)) = 0,\end{aligned}$$

що є протиріччям. Отже наше початкове припущення хибне, а речення справді є тотожно істинним.

Зауваження 6.5. Іноді замість того, щоб указувати вільні змінні в предикаті, ми записуємо їх у дужках після символу, яким цей предикат позначено. Наприклад, $P_1(x)$ або $Q(x,y)$.

Приклад 6.6. *Перевірити, що речення не є тотожно істинним*:

$$P(a) \wedge Q(a,a) \to \forall x(\neg Q(x,b) \vee Q(a,x)),$$

де a,b *— константи.*

Розв'язання ✎. Оскільки у нас вже є дві константи, спробуємо побудувати інтерпретацію на двоелементній множині $M = \{a,b\}$. Для цього потрібно заповнити таблиці значень предикатів P і Q.

Імплікація є хибною, якщо ліворуч стоїть істина, а праворуч хибність. Ліворуч у нас стоїть кон'юнкція, яка істинна, якщо об'єднує істинні значення. Отже маємо одразу поставити істину в клітині, що відповідає $P(a)$, та тій, що відповідає $Q(a,a)$:

y	$\mathcal{I}(\mathbf{Q})(\mathbf{x},\mathbf{y})$	
	x	
	a	b
a	1	
b		

x	$\mathcal{I}(\mathbf{P})(\mathbf{x})$
a	1
b	

Праворуч стоїть мінімум значень диз'юнкції $\neg Q(x,b) \vee Q(a,x)$. Диз'юнкція хибна тільки тоді, якщо обидва значення хибні. Оскільки нас цікавить мінімальне значення, то потрібно, щоб існував хоча б один x такий, що цей вираз є хибним, тобто

$$\begin{aligned} \operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,\neg Q(x,b)) &= 0, \text{ а отже, } \operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,Q(x,b)) = 1; \\ \operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,Q(a,x)) &= 0. \end{aligned}$$

У таблиці предиката Q у нас зайнята лише клітина $Q(a,a)$, отже, можемо обрати $x = b$ і додати в таблицю відповідні значення ($\operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,Q(b,b)) = 1; \operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,Q(a,b)) = 0$):

y	$\mathcal{I}(\mathbf{Q})(\mathbf{x},\mathbf{y})$	
	x	
	a	b
a	1	
b	0	1

x	$\mathcal{I}(\mathbf{P})(\mathbf{x})$
a	1
b	

Клітини, що залишились, можемо заповнити будь-яким способом — це не змінить значення в цій інтерпретації нашого речення.

Таким чином ми побудували інтерпретацію, в якій речення є хибним, а отже довели, що воно не є тотожно істинним.

Основні задачі

6.1. Вкажіть вільні та зв'язані входження кожної змінної в реченнях:

1) $\forall x P(x)$;

2) $P(x) \to \exists x Q(x)$;

3) $\exists x \mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)$;

4) $\exists x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \to \forall x R(x)$.

6.2. Доведіть, що наведені речення логіки відношень є тотожно істинними.

1. $\forall x \mathbf{A} \to \mathbf{A}_t^x$, де терм t є вільним для x у реченні $\mathbf{A}$.

2. $\forall x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\exists x \mathbf{A} \to \mathbf{B})$, де x не є вільною змінною в реченні $\mathbf{B}$.

Ці речення та речення із задачі 6.18 доповнюють список аксіом, які будуть застосовуватись для формального виводу у логіці відношень.

6.3. Доведіть, що якщо речення F_1 та $F_1 \to F_2$ тотожно істинні, то F_2 також тотожно істинне.

6.4. Наведіть приклади, які показують, що коли терм t не є вільним для x у реченні $\mathbf{A}$, речення $\forall x \mathbf{A} \to \mathbf{A}_t^x$ може не бути тотожно істинним.

6.5. Доведіть, що коли $\models_{\mathcal{I}} \mathbf{A}$, то $\models_{\mathcal{I}} \forall x \mathbf{A}$.

6.6. Наведіть приклад того, що речення $\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{A}$ може не бути тотожно істинним.

6.7. Доведіть, шо такі речення логіки предикатів є тотожно істинними.

1. $(\forall x\mathbf{A} \wedge \forall x\mathbf{B}) \leftrightarrow \forall x(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$.
2. $\forall x_i \forall x_j \mathbf{A} \leftrightarrow \forall x_j \forall x_i \mathbf{A}$.
3. $\exists x_i \forall x_j \mathbf{A} \to \forall x_j \exists x_i \mathbf{A}$.

6.8. Доведіть, шо і речення логіки предикатів не є тотожно істинними.

1. $(\forall x_1 P_1(x_1) \to \forall x_1 P_2(x_1)) \to (\forall x_1(P_1(x_1) \to P_2(x_1))$.
2. $(\forall x_1(P_1(x_1) \vee P_2(x_1))) \to (\forall x_1 P_1(x_1) \vee \forall x_1 P_2(x_1))$.

6.9. Скількома способами можна проінтерпретувати речення:

1) $(\exists x_2 P_1(x_1,x_2) \vee \forall x_1 P_2(x_1,c_1)) \wedge P_3(x_1,c_2,x_1)$;

2) $\exists x_2(\forall x_1(P_1(x_1,x_2,c_1) \to P_2(x_1,c_2,c_1))) \wedge P_3(x_1,c_3)$

над множиною $\mathbf{A}$ із n елементів?

6.10. Скільки існує різних інтерпретацій речення:

1) $\forall x_1 \forall x_2(P(x_1,x_2) \to P(x_2,x_1))$;

2) $\forall x_1 \forall x_2(P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_1))$

над множиною із n елементів, при яких воно перетворюється в істинне твердження?

6.11. Чи будуть тотожно істинними (загальнозначимими) речення:

1) $\forall x_1 P(x_1) \to \exists x_2 P(x_2)$;

2) $\forall x_1(P_1(x_1) \to P_2(x_2)) \leftrightarrow (\exists x_1 P_1(x_1) \to P_2(x_2))$?

6.12. Чи буде виконливим речення

$$\forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2) \leftrightarrow \exists x_2 \forall x_1 P(x_1,x_2)?$$

Домашнє завдання

6.13. Вкажіть вільні та зв'язані входження кожної змінної в реченнях:

1) $\forall x P(x) \to P(y)$;

2) $\exists x \exists y (P(x,y) \land Q(z))$.

6.14. Нехай предикатні символи P_1 і P_2 у реченні $F = \exists x_3 (P_1(x_1,x_3) \land P_2(x_3,x_2))$ інтерпретуються над множиною $\mathbb{R}$ так:

$$P_1(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_2 = \operatorname{tg} x_1; \\ 0 & \text{в іншому разі,} \end{cases} \quad P_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_2 = x_1^3; \\ 0 & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Який предикат над $\mathbb{R}$ виражає речення F у цій інтерпретації? Чи буде речення F виконливим? Чи буде воно тотожно істинним?

6.15. Чи буде виконливим речення $\exists x_1 \exists x_2 (P(x_1) \land \neg P(x_2))$?

6.16. Чи буде тотожно істинним речення $P(x_1) \to \exists x_2 P(x_2)$?

6.17. Наведіть приклади, які показують, що коли терм t не є вільним для x у реченні $\mathbf{A}$, то речення $\mathbf{A}_t^x \to \exists x \mathbf{A}$ може не бути тотожно істинним.

6.18. Доведіть, що наступні речення логіки відношень є тотожно істинними:

1. $\mathbf{A}_t^x \to \exists x \mathbf{A}$, де терм t є вільним для x у реченні $\mathbf{A}$.
2. $\forall x (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \forall \mathbf{B})$, де x не є вільною змінною в реченні $\mathbf{A}$.

Література.

[**3**, с. 30–35]; [**4**, с. 53–63].

Заняття № 7. Логічні наслідки

Теоретичні відомості

Означення 7.1. *Нехай Γ — множина речення логіки предикатів. Будемо називати речення* $\mathbf{A}$ *логічним наслідком із множини* Γ *і позначати* $\Gamma \models \mathbf{A}$, *якщо* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = 1$ *для будь-якої інтерпретації* $\mathcal{I}$ *і довільного розподілу* ϕ *в цій інтерпретації таких, що* $\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{B}) = 1$ *для довільного речення* $\mathbf{B} \in \Gamma$.

Перевірка того, чи є певне міркування вірним у логіці відношень, не суттєво відрізняється від того, як ми це робили в логіці висловлювань.

Приклад 7.2. *Перевірити, чи буде правильним міркування*:
Деякі птахи вміють літати. Всі страуси птахи. Отже страус Гоша вміє літати.

Розв'язання ✎. У наведеному міркуванні можемо виділити дві предикатні конструкції:

$$L(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ вміє літати;} \\ 0, & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ птах;} \\ 0, & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ страус;} \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Крім того ми маємо константу — позначимо її c — конкретного страуса Гошу.

Тоді наше міркування мовою логіки відношень запишеться так:

$$\{\exists x(P(x) \wedge L(x)), \forall x(S(x) \to P(x))\} \models S(c) \to L(c).$$

Зауважимо, що це не єдиний спосіб записати це міркування — звичайно його можна переписати, використовуючи інші сполучники.

Розглянемо коли множина умов може набувати істинних значень:

$$\mathrm{val}\quad (\mathcal{I},\phi,\exists x(P(x) \wedge L(x))) = 1; \tag{22}$$

$$\mathrm{val}\quad (\mathcal{I},\phi,\forall x(S(x) \to P(x))) = 1. \tag{23}$$

Застосувавши правила з 6.3 до (23), маємо

$$\forall \psi_1 \in \phi^x \operatorname{val}(\mathcal{I},\psi_1,S(x) \to P(x)) = 1. \tag{24}$$

Із (22) одержуємо, що $\exists \psi_2 \in \phi^x$:

$$\begin{aligned} \text{val} \quad & (\mathcal{I},\psi_2,P(x)) = 1; \\ \text{val} \quad & (\mathcal{I},\psi_2,L(x)) = 1. \end{aligned}$$

Із того, що (24) виконується для довільного розподілу $\psi_1 \in \phi^x$, випливає, що воно виконується зокрема і для $\psi_2 \in \phi^x$.

Оскільки інтерпретація включає в себе визначення значення предикатів на константах, то ми можемо покласти в інтерпретації $\mathcal{I}$ $\operatorname{val}(\mathcal{I},\psi_2,S(c)) = 1$ і $\operatorname{val}(\mathcal{I},\psi_2,L(c)) = 0$.

У такий спосіб ми побудували інтерпретацію та розподіл, у яких речення з множини умов істинні, а «наслідок» хибний:

val $(\mathcal{I},\psi_2,P(x)) = 1$;
val $(\mathcal{I},\psi_2,L(x)) = 1$;
val $(\mathcal{I},\psi_2,S(x)) = 1$, це значення ми можемо брати довільним;
val $(\mathcal{I},S(c)) = 1$;
val $(\mathcal{I},L(c)) = 0$.

Отже, міркування є логічно невірним.

Зауважимо, що така побудова працює тільки на множині, яка містить хоча б два елементи. На одноелементній множині вказане логічне міркування перетворюється на істинне.

Зауваження 7.3. Загальний принцип розв'язку задач не змінюється з попереднього розділу. Якщо ми хочемо показати, що міркування $\Gamma = \{F_1,...,F_n\} \models F$:

- є логічно вірним, то доведемо, що не існує такої інтерпретації $\mathcal{I}$ і розподілу ϕ, що $\operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,F_i) = 1$ для всіх i, а $\operatorname{val}(\mathcal{I},\phi,F) = 0$ (доводимо від супротивного);

- не є логічно вірним, то наведемо приклад інтерпретації та розподілу, в яких речення з множини Γ всі істинні, а речення F хибне.

При цьому ми застосовуємо той самий інструментарій. Часто можемо надати потрібну інтерпретацію одразу, без детальної побудови.

Основні задачі

7.1. Використовуючи поняття логічного наслідку для логіки предикатів, пересвідчитись, чи будуть правильними міркування.

1. Ніхто не може розшифрувати прислане повідомлення, не знаючи шифру, за допомогою якого воно було зашифроване. Ні Іванов, ні Петренко його не розшифрували. Отже вони не знають шифру, за допомогою якого зашифроване це повідомлення.

2. Кожне раціональне число є дійсним. Існує раціональне число. Отже, існує дійсне число.

3. Для довільної множини X існує множина Y більшої потужності. Якщо X міститься в Y то потужність X не перевищує потужність множини Y. Кожна множина міститься в U. Отже, U не є множиною.

4. Деякі першокурсники добре ставляться до всіх второкурсників. Жоден першокурсник не любить нікого зі студентів останнього курсу. Отже, жоден второкурсник не є студентом останнього курсу.

7.2. Довести

1) Речення $\mathbf{B}$ є логічним наслідком речення $\mathbf{A}$ тоді і тільки тоді, коли речення $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ є тотожно істинним реченням.

2) Якщо речення $\mathbf{B}$ є логічним наслідком речення $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}$ тотожно істинне в інтерпретації $\mathcal{I}$, то і речення $\mathbf{B}$ тотожно істинне в інтерпретації $\mathcal{I}$.

7.3. Довести, що коли $\models_{\mathcal{I}} \mathbf{A}$, то $\models_{\mathcal{I}} \forall x\mathbf{A}$.

7.4. Навести приклад того, що речення $\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{A}$ може не бути тотожно істинним.

7.5. Чи правильно стоїть знак $\models$ у співвідношеннях:

1) $\forall x_i \exists x_j \mathbf{A}(x_i,x_j) \models \exists x_i \forall x_j \mathbf{A}(x_i,x_j)$;

2) $\mathbf{A}(x_i) \to \mathbf{B} \models \exists x\mathbf{A}(x_i) \to \mathbf{B}$?

7.6. Довести, що якщо $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\} \models \mathbf{B}$ і $\mathbf{A}$ замкнена, то $\Gamma \models \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Наведіть приклад того, що без обмеження на $\mathbf{A}$ це твердження може бути невірним.

7.7. Записати мовою логіки відношень означення неперервності функції в точці і вивести логічними засобами звідси означення розривності.

Домашнє завдання

7.8. Використовуючи поняття логічного наслідку для логіки предикатів, пересвідчитись, чи буде правильним міркування.

«Декому подобається співати. Дехто не любить нікого, хто любить співати. Отже, декого люблять не всі.»

7.9. Писатимемо $\models_n \mathbf{A}$, якщо $\models_M \mathbf{A}$ для кожної множини з n елементами.

1. Довести, що з $\models_n \mathbf{A}$ випливає $\models_m \mathbf{A}$ при $m < n$.
2. Навести приклад речення $\mathbf{A}$, такого що $\models_n \mathbf{A}$, але не $\models_{n+1} \mathbf{A}$, де n — задане натуральне число.

7.10. Довести, що

1) $\forall x \neg \mathbf{A} \leftrightarrow \neg \exists x \mathbf{A}$;

2) $\exists x \neg \mathbf{A} \leftrightarrow \neg \forall x \mathbf{A}$;

3) $\forall x \mathbf{A} \leftrightarrow \forall y \mathbf{A}^x_y$, якщо y не зустрічається в $\mathbf{A}$;

4) $\exists x \mathbf{A} \leftrightarrow \exists y \mathbf{A}^x_y$, якщо y не зустрічається в $\mathbf{A}$.

Під $F_1 \leftrightarrow F_2$ розуміємо тут і далі, що $F_1 \models F_2$ і $F_2 \models F_1$.

Література.

[**3**, с. 30–39]; [**4**, с. 57–63].

Заняття № 8. Логічні виводи

Теоретичні відомості

Система аксіом логіки відношень складається зі знайомих нам десяти аксіом логіки висловлювань 3.2 та чотирьох специфічно предикатних аксіом.

Аксіоми 8.1 (аксіоми логіки відношень).

(A1) $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;

(A2) $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;

(A3) $\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

(A4) $\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

(A5) $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C}))$;

(A6) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(A7) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

(A8) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))$;

(A9) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A})$;

(A10) $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$;

(A11) $\forall x\mathbf{A} \to \mathbf{A}_t^x$ (*якщо* t *— терм вільний для* x *в* $\mathbf{A}$);

(A12) $\mathbf{A}_t^x \to \exists x\mathbf{A}$ (*якщо* t *— терм вільний для* x *в* $\mathbf{A}$);

(A13) $\forall x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{B})$ (*якщо* x *— змінна, яка не є вільною в* $\mathbf{A}$);

(A14) $\forall x(\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \to (\exists x\mathbf{B} \to \mathbf{A})$ (*якщо* x *— змінна, яка не є вільною в* $\mathbf{A}$).

Означення 8.2 (процедура логічного виводу в логіці відношень). *Послідовність речень* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ *називається логічним виводом речення* $\mathbf{A}$ *з теорії (тобто множини речень)* $\mathfrak{T}$, *якщо для кожного номера і речення* $\mathbf{A}_i$ *задовольняє одну з таких умов.*

1. $\mathbf{A}_i$ *— аксіома логіки відношень* 8.1.
2. $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{T}$.

3. *Існують номери $j < i$ та $k < i$ такі, що $\mathbf{A}_j = (\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_i)$ (у цьому випадку кажуть, що $\mathbf{A}_i$ одержане з $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_i$ та $\mathbf{A}_k$ за правилом modus ponens (2.4).*

4. *Існує номер $j < i$ такий, що $\mathbf{A}_i = \forall x \mathbf{A}_j$, де x — деяка змінна (кажуть, що $\mathbf{A}_i$ одержане з $\mathbf{A}_j$ узагальненням за змінною x).*

5. $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$.

Якщо такий вивід існує, кажуть, що $\mathbf{A}$ виводиться в теорії $\mathfrak{T}$ або є теоремою теорії $\mathfrak{T}$, і пишуть $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{A}$.

Зокрема, якщо теорія $\mathfrak{T}$ порожня, кажуть, що $\mathbf{A}$ виводиться в логіці відношень або є теоремою логіки відношень.

Означення 8.3.

1. *Нехай $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ і послідовність $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ є виводом із теорії ,$\mathfrak{T}$. Кажуть, що речення $\mathbf{B}_i$ в цьому виводі не залежить від $\mathfrak{T}_2$, якщо існує підпослідовність $\mathbf{B}_{i_1}$,$\mathbf{B}_{i_2}, \ldots, \mathbf{B}_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, яка є виводом із теорії $\mathfrak{T}_1$ і містить речення $\mathbf{B}_i$.*

2. *Вивід $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ називається вільним для $\mathfrak{T}_2$, якщо в ньому узагальнення за змінними, які є вільними в реченнях з $\mathfrak{T}_2$, не застосовуються до речень, які залежать від $\mathfrak{T}_2$ в цьому виводі.*

Теорема 8.4 (теорема дедукції). *Припустимо, що існує вивід речення $\mathbf{B}$ з теорії $\mathfrak{T} \cup \{\mathbf{A}\}$, вільний для $\mathbf{A}$. Тоді існує вивід речення $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ з теорії $\mathfrak{T}$, в якому застосовуються узагальнення лише за тими ж змінними, що й у наведеному виводі $\mathbf{B}$ з $\mathfrak{T} \cup \{\mathbf{A}\}$. Зокрема, якщо в цьому виводі взагалі не застосовується узагальнення за змінними, які є вільними в $\mathbf{A}$ (наприклад, речення $\mathbf{A}$ замкнене), і $\mathfrak{T} \cup \{\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}\}$, то $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Якщо $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ і вихідний вивід не залежав від $\mathfrak{T}_2 \cup \{\mathbf{A}\}$, то одержаний вивід не залежить від $\mathfrak{T}_2$.*

Зауваження 8.5. У процесі формального виводу в логіці відношень можна використовувати:

- аксіоми 8.1;
- правило modus ponens 2.4;
- теорему дедукції 8.4;

- правило узагальнення;
- речення, які були виведені раніше (зокрема речення, одержані у задачах 3.3 та 3.7).

Означення 8.6. *Теорією першого порядку називається довільна множина $\mathfrak{T}$ речень логіки відношень.*

Приклад 8.7. *Побудуйте вивід речення* $\exists x\ \neg\mathbf{A} \to \quad \neg\forall x\mathbf{A}$.

Розв'язання ✎. (A11): $\forall x\mathbf{A} \to \mathbf{A}$;
речення із задачі 3.3: $((\forall x\mathbf{A}) \to \mathbf{A}) \to (\neg\mathbf{A} \to \neg(\forall x\mathbf{A}))$;
modus ponens: $\neg\mathbf{A} \to \neg(\forall x\mathbf{A})$;
правило узагальнення: $\forall x(\neg\mathbf{A} \to \neg(\forall x\mathbf{A}))$;
(A 14): $\forall x(\neg\mathbf{A} \to \neg\forall x\mathbf{A}) \to (\exists x\neg\mathbf{A} \to \neg\forall x\mathbf{A})$;
modus ponens: $\exists x\neg\mathbf{A} \to \neg\forall x\mathbf{A}$.

Основні задачі

8.1. Нехай x не є вільною змінною в реченні $\mathbf{A}$. Доведіть таке.

1. $\vdash (\exists x\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \to \forall x(\mathbf{B} \to \mathbf{A})$.
2. $\vdash (\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{B}) \to \forall x(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$.

8.2. Занумеруємо яким-небудь способом усі символи предикатів логіки відношень: $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ і кожному реченню $\mathbf{A}$ логіки відношень поставимо у відповідність речення $\mathbf{A}^\star$ логіки висловлювань за правилами:

- із речення $\mathbf{A}$ видалимо всі символи змінних і констант, функціоналів і кванторів;
- символ предиката P_n замінимо атомом $\mathbf{A}_n$ логіки висловлювань так, щоб отримати речення логіки висловлювань.

Доведіть таке.

1. Якщо $\mathbf{A}$ — аксіома числення предикатів, то $\mathbf{A}^\star$ - тавтологія.
2. Якщо $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ — вивід речення $\mathbf{A}$ з множини речень Γ у численні предикатів, то $\mathbf{A}_1^\star, \ldots, \mathbf{A}_n^\star$ — вивід речення $\mathbf{A}^\star$ з множини речень $\Gamma^\star$ у численні висловлювань. Зокрема, якщо $\vdash \mathbf{A}$, то $\mathbf{A}^\star$ — тавтологія.
3. У численні предикатів неможливо одночасно $\vdash \mathbf{A}$ і $\vdash \neg\mathbf{A}$.

8.3. Нехай $\mathfrak{T}$ — теорія першого порядку. Позначимо $\mathbf{A} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{B}$, якщо $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ і $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ одночасно. Доведіть таке:

1) $\forall x(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv_{\mathfrak{T}} \forall x\mathbf{A} \wedge \forall x\mathbf{B}$;

2) $\exists x(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv_{\mathfrak{T}} \exists x\mathbf{A} \vee \exists x\mathbf{B}$;

3) $\exists x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \equiv_{\mathfrak{T}} \forall x\mathbf{A} \to \exists x\mathbf{B}$,

   зокрема,

   $\exists x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{A} \to \exists x\mathbf{B}$, якщо змінна x не є вільною в реченні $\mathbf{A}$,

   $\exists x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \equiv_{\mathfrak{T}} \forall x\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, якщо змінна x не є вільною в реченні $\mathbf{B}$.

8.4. Перевірити, чи будуть наведені послідовності виводами в логіці відношень:

A 1) $\forall x\exists yP(x,y) \to \exists yP(f(y,y))$;

B 1) $\forall xP(x) \to P(f(y))$,
   2) $\forall xP(x) \to \forall yP(f(y))$;

C 1) $P(x) \to \exists P(x)$,
   2) $(P(x) \to \exists xP(x)) \to (\forall xP(x) \to (P(x) \to \exists xP(x)))$,
   3) $\forall xP(x) \to (P(x) \to \exists xP(x))$.

8.5. Доведіть, що

1) $\vdash \forall x\mathbf{A} \vee \forall x\mathbf{B} \to \forall x(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;

2) $\vdash \exists x(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \exists x\mathbf{A} \wedge \exists x\mathbf{B}$;

3) $\vdash (\exists x\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{B}) \to \forall x(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$.

Чи завжди виводяться обернені імплікації?

8.6. Побудуйте виводи наступних речень:

1) $\exists x\exists yP(x,y) \to \exists y\exists xP(x,y)$;

2) $\exists x\forall yP(x,y) \to \forall y\exists xP(x,y)$;

3) $\forall x\forall yP(x,y) \to \forall xP(x,x)$;

8.7. Доведіть твердження:

1) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$;

2) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall y P(y) \to \forall z Q(z)$.

8.8. Доведіть, що коли $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, то $\vdash_{\mathfrak{T}} \forall x\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{B}$.

8.9. Доведіть, що якщо $\Gamma \vdash \forall x\mathbf{A}(x)$, то $\Gamma \vdash \mathbf{A}(t)$ для довільного терма t, вільного для x в $\mathbf{A}(x)$.

Додаткові задачі

У наступних двох задачах, сформулюйте систему постулатів, які б визначали відповідні теорії, й доведіть виключно логічними засобами відповідні твердження.

8.10. Доведіть логічними засобами теорему про границю суми числових послідовностей.

8.11. Доведіть логічними засобами теорему про суму кутів трикутника.

Домашнє завдання

8.12. Побудуйте виводи речень:

1) $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(x,y)$;

2) $\exists x P(x,x) \to \exists y \exists x P(x,y)$.

8.13. Побудуйте вивід речення $\exists x_i \ \neg\mathbf{A} \to \neg\forall x\mathbf{A}$.

8.14. Доведіть, що якщо $\Gamma \vdash \mathbf{A}(t)$ для деякого терма t, вільного для x в $\mathbf{A}(x)$, то $\Gamma \vdash \exists x\mathbf{A}(x)$.

Література.

[**3**, с. 36–42]; [**4**, с. 64–66].

Розділ 3

Теорії першого порядку

Заняття № 9. Моделі 1

Теоретичні відомості

Означення 9.1.

1. *Теорією першого порядку називається довільна множина* $\mathfrak{T}$ *речень логіки відношень. Кажуть, що предикат або функціонал (зокрема, висловлювання або константа) належить теорії* $\mathfrak{T}$*, або теорія* $\mathfrak{T}$ *містить цей предикат або функціонал, якщо він зустрічається принаймні в одному з речень, які належать* $\mathfrak{T}$*. Кажуть, що речення* $\mathbf{A}$ *є реченням теорії* $\mathfrak{T}$*, якщо воно містить лише ті предикати та функціонали, які належать теорії* $\mathfrak{T}$*.*

2. *Моделлю теорії* $\mathfrak{T}$ *називається така інтерпретація* $\mathcal{I}$*, що* $\models_{\mathcal{I}} \mathbf{A}$ *для всіх речень* $\mathbf{A} \in \mathfrak{T}$*. Якщо* M *— область цієї інтерпретації, то кажуть, що* $\mathcal{I}$ *— модель теорії* $\mathfrak{T}$ *на множині* M*. Потужність множини* M *називають також потужністю моделі* $\mathcal{I}$*. Теорію називають сумісною, якщо для неї існує хоча б одна модель.*

Речення з $\mathfrak{T}$ *у математиці часто називають постулатами цієї теорії. Ми не вживатимемо для них назву «аксіоми», оскільки в логіці це слово використовують у зовсім іншому значенні при аксіоматизації того чи іншого розділу формальної логіки.*

Означення 9.2. *Теорію першого порядку* $\mathfrak{T}$ *називатимемо розв'язною, якщо існує алгоритм, який за кожним замкненим реченням* $\mathbf{A}$ *цієї теорії визначає, чи* $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{A}$*.*

Означення 9.3 (теорія з рівністю).

1. *Теорія першого порядку $\mathfrak{T}$ називається теорією першого порядку з рівністю* (*або коротше теорією з рівністю*), *якщо вона містить двомісний предикат E та постулати*

(E1) $E\mathrm{v}_0\mathrm{v}_0$,

(E2$_{F,k,l}$) $E\mathrm{v}_0\mathrm{v}_1 \to E(F\mathbf{u}\mathrm{v}_0\mathbf{v}, F\mathbf{u}\mathrm{v}_1\mathbf{v})$,

(E3$_{P,k,l}$) $E\mathrm{v}_0\mathrm{v}_1 \to (P\mathbf{u}\mathrm{v}_0\mathbf{v} \to P\mathbf{u}\mathrm{v}_1\mathbf{v}))$,

де в реченнях (E2) *та* (E3) *F і P позначають, відповідно, довільний функціонал або предикат, який належить теорії $\mathfrak{T}$, $\mathbf{u} = \mathrm{v}_2 \ldots \mathrm{v}_{k+1}$ і $\mathbf{v} = \mathrm{v}_{k+2} \ldots \mathrm{v}_{k+l+1}$, де k,l — довільні невід'ємні числа такі, що $k + l + 1 = n$, якщо функціонал F або предикат P є n-місним.*

2. *Модель $\mathcal{I}$ теорії з рівністю $\mathfrak{T}$ називається нормальною, якщо $\mathcal{I}(E)$ — відношення рівності, тобто $\mathcal{I}(E)(a,b) = 1$ тоді й лише тоді, коли $a = b$.*

Для зручності часто замість Eab писатимемо $a = b$.

Приклад 9.4. *Побудувати теорію, модель якої — теорія груп.*

Розв'язання ✎. Спочатку запишемо, що таке теорія груп. Це певна замкнена відносно бінарної дії множина, для всіх елементів x,y,z якої виконуються аксіоми групи.

Аксіоми 9.5.

1. *Асоціативність*: $x * (y * z) = (x * y) * z$.

2. *Існування нейтрального елемента e такого, що $e * x = x * e = x$.*

3. *Існування оберненого x^{-1}: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.*

Отже, щоб записати теорію груп мовою логіки, необхідно ввести:

- двомісний функціонал Pxy, який відповідатиме дії групи;
- константу e, яка відповідатиме нейтральному елементу.

Тоді казатимемо, що теорія складається з Pxy, e та постулатів:

1) $\forall x \forall y(P(xP(yz)) = P((Pxy)z)$;

2) $\forall x(Pxe = x \wedge Pex = x)$;

3) $\forall x \exists y(Pxy = e \wedge Pyx = e)$.

Зверніть увагу на те, що оскільки ми використали функціонал P, а не предикат, нам не потрібно окремо формулювати умову замкненості множини відносно бінарної дії.

Ми не пишемо x^{-1}, оскільки це не є літерою логіки.

Приклад 9.6. *Наведіть приклад сумісної теорії першого порядку, всі моделі якої містять точно два елементи.*

Розв'язання ✎. Найочевиднішою можливістю ввести обмеження на розмір моделі є такі постулати:

1) $\exists x_1 \exists x_2 \neg(x_1 = x_2)$ – існують два нерівні елементи;

2) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee (x_2 = x_3))$ – в кожній трійці елементів два рівні.

Основні задачі

9.1. Наведіть приклад сумісної теорії першого порядку, всі моделі якої містять:

1) рівно один елемент;

2) не більше n елементів.

9.2. Вкажіть теорію першого порядку, модель якої — це:

1) поле характеристики 0;

2) лінійно впорядкована множина;

3) лінійно впорядкована множина з мінімальним елементом;

4) частково впорядкована множина.

9.3. Чи існує модель $\mathfrak{M}$ на множині $M = \{a,b\}$, в якій було б виконливим речення:

$$\forall x_1 \exists x_2 (F_1(x_1,x_2,x_3) \vee F_2(x_1,x_2,x_3))?$$

9.4. Нехай $\mathbf{A}$ — деяке замкнене речення теорії полів. Доведіть, що коли $\mathbf{A}$ істинне в усіх полях характеристики 0, то існує таке натуральне n, що $\mathbf{A}$ істинне в усіх полях довільної характеристики $p > n$.

9.5. Доведіть, що коли теорія першого порядку $\mathfrak{T}$ має модель на множині M, то вона має модель на довільній множині $N \supseteq M$.

9.6. Наведіть приклад сумісної теорії з рівністю, яка не має:

1) моделей на множинах, які містять менше, ніж m елементів, де m — задане натуральне число;

2) скінченних моделей.

9.7. Нехай $\mathfrak{T}$ — довільна теорія з рівністю. Доведіть, що

1) $\mathfrak{T} \models x = y \to y = x$;

2) $\mathfrak{T} \models x = y \wedge y = \mathrm{z} \to x = \mathrm{z}$.

9.8. Знайдіть теорії першого порядку, моделі яких — це:

1) поля характеристики 0;

2) алгебраїчно замкнені поля.

Додаткові задачі

9.9. Розглядається теорія $\mathfrak{T}$ першого порядку з рівністю. Позначимо через $\exists! x\mathbf{A}$ речення $\exists x \forall y(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A}_y^x \to y = x))$. Припустимо, що $\mathfrak{T} \vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists! y F$ для деякого речення F з вільними змінними $x_1, \ldots, x_n, y$. Додамо до теорії $\mathfrak{T}$ новий n-місний функціонал f і речення $y = f(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow F$. Доведіть, що кожну модель теорії $\mathfrak{T}$ можна перетворити на модель розширеної теорії. Ця процедура дозволяє додавати до теорії нові функціонали, які можуть бути описані засобами цієї теорії.

Домашнє завдання

9.10. Знайдіть теорії першого порядку, моделі яких це лінійно впорядковані множини, в яких немає найбільшого елемента.

9.11. Наведіть приклад теорії з рівністю, яка має нормальні моделі лише на множинах з m елементами.

Література.

[**3**, с. 36–39]; [**4**, с. 64–70, с. 86–92].

Заняття № 10. Моделі 2

Теоретичні відомості

Означення 10.1. *Теорія першого порядку $\mathfrak{T}$ називається*

- *суперечливою, якщо існує таке речення* $\mathbf{A}$, *що* $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{A}$ *і* $\mathfrak{T} \vdash \neg\mathbf{A}$;
- *повною, якщо для довільного замкненого речення* $\mathbf{A}$ *цієї теорії або* $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{A}$, *або* $\mathfrak{T} \vdash \neg\mathbf{A}$.

Приклад 10.2. *Покажіть, що наведена формула не має скінченних моделей*:

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \exists y P(x,y).$$

Розв'язання ✎. Припустимо, що скінченна модель існує і складається з елементів $c_1,...,c_n$. Наша формула є кон'юнкцією таких тверджень:

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)); \tag{25}$$

$$\forall x \neg P(x,x); \tag{26}$$

$$\forall x \exists y P(x,y). \tag{27}$$

Нашою метою є навести інтерпретацію, в якій всі ці речення є істинними, тобто заповнити скінченну таблицю значень предиката $P(x,y)$ – єдиного предиката, який фігурує в нашому реченні:

x_1	x_2		
	c_1	...	c_n
c_1			
...			
c_n			

Діагональ таблиці заповнюється нулями завдяки істинності твердження (26).

Залишилось твердження (25). Щоб воно напевно було істинним, необхідно аби для кожної трійки c_i,c_j,c_k такої, що

$$P(c_i,c_j) = 1,$$
$$P(c_j,c_k) = 1$$

також і $P(c_i,c_k) = 1$.

Інші комбінації нас не цікавлять, оскільки вони напевно дають істинне значення імплікації.

Покладемо $c_i = c_k$. Ми знаємо, що $P(c_i,c_i) = 0$, тож нулем має бути $P(c_i,c_j)$ або $P(c_j,c_i)$. Але це знов-таки має справджуватись для довільних i,j, зокрема і якщо ми поміняємо їх місцями.

Таким чином ми заповнили всю нашу скінченну таблицю нулями.

Розглянемо твердження (27). Воно говорить, що в кожній графі зустрічається хоча б одна одиниця, що призводить до протиріччя і доводить, що формула справді не має скінчених моделей.

Основні задачі

10.1. Покажіть, що наведені формули є виконливими, але не мають скінченних моделей:

1) $\forall x \exists y \forall z((P(y,z) \to P(x,z)) \wedge P(x,x) \wedge \neg P(y,x))$;

2) $\forall x \forall y \forall z(P(x,x) \wedge (P(x,z) \to P(x,y) \vee P(y,z))) \wedge \forall y \exists z \neg P(y,z)$.

10.2. Покажіть, що

- кожна суперечлива теорія є повною;
- із суперечливої теорії виводиться будь-яке речення **B**.

10.3. Нехай $\mathfrak{T}$ – теорія першого порядку з рівністю. Доведіть, що тоді або потужності всіх скінченних нормальних моделей цієї теорії обмежені, або $\mathfrak{T}$ має зліченну модель.

10.4. Нехай f,g — функціонали, R — унарний предикат. Введемо позначення:

1) $F_1 = \exists x,y(R(x) \wedge \neg R(y))$;

2) $F_2 = \forall x \exists y(R(x) \to R(y) \wedge x \neq y)$;

3) $F_3 = \forall x,y(R(x) \wedge R(y) \to (f(x) = f(y) \to x = y))$;

4) $F_4 = \forall x,y(R(x) \wedge R(y) \to (g(x) = g(y) \to x = y))$;

5) $F_5 = \forall y \exists x(R(y) \to R(x) \wedge y = f(x))$;

6) $F_6 = \forall y \exists x(R(y) \to R(x) \wedge y = g(x))$;

7) $F_7 = \forall x \exists y(R(x) \to R(y) \wedge f(x) = g(y))$;

8) $F_8 = \exists x,y(R(x) \wedge R(y) \wedge f(x) \neq g(y))$;

9) $F_9 = \forall x,y(f(x) = g(y) \rightarrow R(x) \wedge R(y))$.

Укажіть модель (якщо така існує) для теорій:

1) $\mathfrak{T}_1 = \{F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6,F_7,F_8,F_9\}$;

2) $\mathfrak{T}_2 = \{F_1\neg F_2,F_5,\neg F_6,F_7\}$;

3) $\mathfrak{T}_3 = \{\neg F_1,F_6,\neg F_7\}$.

10.5. Розглянемо теорію, стандартна модель якої — абелева група (необхідно до аксіом, наведених у прикладі 9.4 додати аксіому комутативності). Позначаючи x^{-1} елемент, обернений до x, доведіть і теореми:

1) $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$;

2) якщо $f{:}G \rightarrow G$, де $f(x) = x^{-1}$, то f — взаємнооднозначне відображення на групу G.

10.6. Перевірте, чи будуть твердження теоремами теорії груп:

1) $\forall x \forall y(x + y = y + x)$;

2) $\forall x \forall y(x + y = x \wedge y + x = x \rightarrow y = 0)$.

10.7. Позначимо $F = \exists x \forall y(x \leq y)$. Доведіть, що ані F, ані $\neg F$ не є теоремами теорії частково впорядкованих множин (розглянутої в задачі 9.2).

10.8. Нехай теорія $\mathfrak{T}_1$ скінченна, а теорія $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ сумісна. Доведіть, що коли теорія $\mathfrak{T}_2$ розв'язна, такою є й теорія $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$.

10.9. Доведіть, що коли теорія $\mathfrak{T}$ несуперечлива і розв'язна, то існує повна розв'язна несуперечлива теорія $\mathfrak{T}^* \supseteq \mathfrak{T}$.

10.10. Доведіть твердження

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \mathfrak{T}^* \vdash \mathbf{A}^{\phi}; \\ 0, & \text{якщо} \quad \mathfrak{T}^* \vdash \neg\mathbf{A}^{\phi}, \end{cases}$$

із доведення теореми про модель у випадках, коли а) $\mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$, б) $\mathbf{A} = \neg\mathbf{B}$, в) $\mathbf{A} = \forall x\mathbf{B}$.

Домашнє завдання

10.11. В умовах задачі 10.4, вкажіть модель (якщо така існує) для теорій:

1) $\mathfrak{T}_1 = \{F_1, F_3, F_5, F_7, F_9\}$;

2) $\mathfrak{T}_2 = \{F_1, \neg F_2, F_3, \neg F_4, F_5, \neg F_6, F_7, \neg F_8, F_9\}$.

10.12. Покажіть, що речення

$$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge \neg P(y,x) \wedge \neg (P(x,x) \leftrightarrow P(y,y)))$$

не має трьохелементної моделі.

10.13. Покажіть, що в кожній теорії міститься лише зліченна кількість речень.

Література.

[**3**, с. 36–39, с. 46–50]; [**4**, с. 64–70, 86–92].

Заняття № 11. Пренексна нормальна форма

Теоретичні відомості

ОЗНАЧЕННЯ 11.1. *Пренексна нормальна форма — форма, в якій речення логіки відношень має вигляд*

$$a_1x_1a_2x_2...a_nx_nF,$$

де $a_i \in \{\forall,\exists\}$, *а* F *не містить кванторів.*

ТЕОРЕМА 11.2. *Кожне речення логіки відношень рівносильне реченню, записаному в пренексній нормальній формі.*

ТВЕРДЖЕННЯ 11.3. *Для довільних речень* $\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{B}$ *та довільної змінної* x:

1) *якщо* $\mathbf{A} \to_{\mathfrak{T}} \mathbf{B}$, *то* $\forall x\mathbf{A} \to_{\mathfrak{T}} \forall x\mathbf{B}$ *і* $\exists x\mathbf{A} \to_{\mathfrak{T}} \exists x\mathbf{B}$;

2) *якщо* $\mathbf{A} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{B}$, *то* $\forall x\mathbf{A} \equiv_{\mathfrak{T}} \forall x\mathbf{B}$ *і* $\exists x\mathbf{A} \equiv_{\mathfrak{T}} \exists x\mathbf{B}$;

3) $\neg\exists x\mathbf{A} \equiv \forall x\neg\mathbf{A}$, *а тому* $\exists x\mathbf{A} \equiv \neg\forall x\neg\mathbf{A}$;

4) $\neg\forall x\mathbf{A} \equiv \exists x\neg\mathbf{A}$, *а тому* $\forall x\mathbf{A} \equiv \neg\exists x\neg\mathbf{A}$;

5) *якщо змінна* y *вільна для* x *у реченні* $\mathbf{A}$ *і не є сама вільною змінною в цьому реченні, то* $\forall x\mathbf{A} \equiv \forall y\mathbf{A}_y^x$ *і* $\exists x\mathbf{A} \equiv \exists y\mathbf{A}_y^x$;

6) $\exists x\mathbf{A} \to \mathbf{B} \equiv \forall x(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$, *якщо* x *не є вільною змінною в реченні* $\mathbf{B}$.

Раніше, у задачах 8.3 та 8.5, ми одержали і правила, які зможемо використовувати для зведення речення до пренексної нормальної форми:

ПРАВИЛА 11.4. (8.3)

1) $\forall x(\mathbf{A} \land \mathbf{B}) \equiv \forall x\mathbf{A} \land \forall x\mathbf{B}$;

2) $\exists x(\mathbf{A} \lor \mathbf{B}) \equiv \exists x\mathbf{A} \lor \exists x\mathbf{B}$;

3) $\exists x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \equiv \forall x\mathbf{A} \to \exists x\mathbf{B}$.

ПРАВИЛА 11.5. (8.5)

1) $\exists x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \to \exists x\mathbf{B}$, *якщо* x *не є вільною в* $\mathbf{A}$;

2) $\exists x(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \equiv \forall\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, *якщо* x *не є вільною в* $\mathbf{B}$;

3) $\forall x(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \forall x\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, *якщо x не є вільною в* $\mathbf{B}$;

4) $\exists x(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv \exists x\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, *якщо x не є вільною в* $\mathbf{B}$.

Приклад 11.6. *Звести до пренексної нормальної форми речення* $\forall x(\exists yR(x,y) \to \exists yS(x,y))$.

Розв'язання ✎. Оберемо деяку («нову») змінну t, яка є вільною для y в $R(x,y)$. Тоді ми маємо право зробити заміну:

$$\forall x(\exists yR(x,y) \to \exists yS(x,y)) \equiv \forall x(\exists tR(x,t) \to \exists yS(x,y)).$$

Зауважимо, що $R(x,t) = R(x,y)^y_t$.

Тепер t є вільною для $\exists yS(x,y)$, а отже за правилом 11.5 ми можемо винести квантор $\exists t$ за дужки:

$$\forall x\exists t(R(x,t) \to \exists yS(x,y)).$$

Але тепер y є вільною змінною для $R(x,t)$, отже,

$$\forall x\exists t\exists y(\underbrace{R(x,t) \to S(x,y)}). \tag{28}$$

Оскільки в дужках залишився безкванторний вислів, то (28) є пренексною нормальною формою початкового речення.

Основні задачі

11.1. Довести, що коли $\mathbf{A} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{A}'$ і $\mathbf{B} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{B}'$, то

1) $\neg\mathbf{A} \equiv_{\mathfrak{T}} \neg\mathbf{A}'$;

2) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{A}' \wedge \mathbf{B}'$;

3) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{A}' \vee \mathbf{B}'$;

4) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \equiv_{\mathfrak{T}} \mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$.

11.2. Довести, що $\forall x\forall y\mathbf{A} \equiv \forall y\forall x\mathbf{A}$.

11.3. Побудувати пренексну форму для таких речень числення предикатів:

1) $\forall x\mathbf{A} \vee \forall x\mathbf{B}$;

2) $\exists x\mathbf{A} \wedge \exists x\mathbf{B}$;

3) $\exists x\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{B}$;

4) $\exists x\mathbf{A} \to \exists x\mathbf{B}$;

5) $\forall x\mathbf{A} \to \forall x\mathbf{B}$.

11.4. Нехай P і Q — деякі предикати. Побудувати пренексну форму для наступних речень:

1) $\exists x_1 P(x_1,x_2,x_3) \to \forall x_1 \exists x_2 Q(x_1,x_2) \wedge \exists x_2 \forall x_3 P(x_1,x_2,x_3)$;

2) $\forall x_2 \exists x_1 Q(x_1,x_2) \wedge \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 P(x_1,x_3,x_2) \to \exists x_2 \exists x_3 Q(x_3,x_2)$.

11.5. Побудувати пренексну нормальну форму речень:

1) $\neg \exists c \forall y \exists z \forall u P(x,y,z,u)$;

2) $\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y)$;

3) $\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$;

4) $\exists c \forall y P(x,y) \to \exists x \forall y Q(x,y)$;

5) $\forall x \exists y (P(x) \to Q(y,z)) \to \exists x \forall z (Q(x,z) \wedge P(y))$;

6) $\forall x P(x) \to \forall y (\forall z Q(x,z) \to \forall u P(u))$.

11.6. Нехай замкнене речення $\mathbf{A}$ має вигляд

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m \mathbf{B},$$

де речення $\mathbf{B}$ не містить кванторів і функціоналів і $n \geq 1$. Довести, що $\models \mathbf{A}$ тоді й тільки тоді, коли $\models_M \mathbf{A}$, де M — множина із n елементів.

Додаткові задачі

Означення 11.7. *Нехай $F_1,\ldots,F_n,F$ — речення з вільними змінними $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Ми називатимемо F булевською комбінацією множини $\Gamma = \{F_1,\ldots,F_k\}$, якщо F може бути побудоване за допомогою множини Γ та сполучників $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, або навпаки — якщо F належить до мінімального набору речень, який складаеться з Γ та всіх таких $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2$, $\neg\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{A}_2$ для всіх $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2$, що включає в себе F.*

11.7. Скільки існує булевських комбінацій Γ таких, що кожна довільна булевська комбінація Γ буде еквівалентною одній з них?

11.8. Як може змінитись довжина речення при зведенні до пренексної нормальної форми?

Домашнє завдання

11.9. Доведіть, що $\exists x \exists y \mathbf{A} \equiv \exists y \exists x \mathbf{A}$.

11.10. Зведіть речення до пренексної нормальної форми:

1) $\exists x \mathbf{B}(x) \to (\exists x \mathbf{C}(x) \to \exists x D(x))$;

2) $\forall x \exists y \mathbf{B}(x,y) \wedge \exists x \mathbf{C}(x) \to \forall y \exists x D(x,y)$;

3) $((\exists x \mathbf{B}(x) \to \exists x \mathbf{C}(x)) \to \exists x D(x)) \to \exists x F(x)$.

11.11. Нехай замкнене речення $\mathbf{A}$ має вигляд $\exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m \mathbf{B}$, де речення $\mathbf{B}$ не містить кванторів і функціоналів. Доведіть, що $\models \mathbf{A}$ тоді й тільки тоді, коли $\models_M \mathbf{A}$, де M — одноелементна множина.

Література.

[**3**, с. 43–45]; [**4**, с. 96–101].

Заняття № 12. Нестандартні моделі. Теорема про модель

Теоретичні відомості

Теорема 12.1 (теорема компактності). *Нехай $\mathfrak{T}$ — теорія. $\mathfrak{T}$ несумісна, якщо в ній існує несумісна підмножина $\mathfrak{T}$. Навпаки: $\mathfrak{T}$ сумісна, якщо всі її підмножини сумісні.*

Теорема 12.2 (теорема про модель). *Кожна несуперечлива теорія першого порядку має скінченну або зліченну модель.*

Означення 12.3.

1. *Нехай $\mathcal{I}$ — модель теорії першого порядку $\mathfrak{T}$ з областю M, а N — підмножина в M. Припустимо, що для кожного функціонала F теорії $\mathfrak{T}$ і кожного з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_m \in N$, де m — місність F, обов'язково $\mathcal{I}(F)\,(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in N$; зокрема, $\mathcal{I}(\mathrm{c}) \in N$ для кожної константи теорії $\mathfrak{T}$. Тоді можна розглянути обмеження $\mathcal{I}_N$ інтерпретації $\mathcal{I}$ на підмножину N, вважаючи, що*

   $$\mathcal{I}_N(F)\,(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \mathcal{I}(F)\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,,$$
   $$\mathcal{I}_N(P)\,(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \mathcal{I}(P)\,(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

   для довільних функціонала F та предиката P. Якщо $\mathcal{I}_N$ також є моделлю теорії $\mathfrak{T}$, її називають підмоделлю моделі $\mathcal{I}$. Кажуть також, що N є підмоделлю в $\mathcal{I}$, або навіть у M, хоч останнє не зовсім коректно, бо модель складається не лише зі своєї області, а ще й з інтерпретацій функціоналів та предикатів.

2. *Підмодель N моделі $\mathcal{I}$ називається елементарною, якщо $\mathrm{val}\,(\mathcal{I}, \phi, \mathbf{A}) = \mathrm{val}\,(\mathcal{I}_N, \phi, \mathbf{A})$ для кожного речення $\mathbf{A}$ теорії $\mathfrak{T}$ і кожного розподілу $\phi\colon \mathfrak{X} \to N$. Зокрема, множини замкнених речень, істинних у моделях $\mathcal{I}$ та $\mathcal{I}_N$, збігаються.*

3. *Якщо N — підмодель (елементарна підмодель) моделі $\mathcal{I}$, то модель $\mathcal{I}$ називається розширенням (відповідно, елементарним розширенням) моделі $\mathcal{I}_N$.*

Зауважимо, що коли $\mathfrak{T}$ — теорія з рівністю, а $\mathcal{I}$ — нормальна модель, кожна її підмодель також нормальна.

Теорема 12.4 (теорема про нестандартні моделі). *Нехай $\mathfrak{T}$ — теорія першого порядку, $\mathcal{I}$ — її зліченна модель. Тоді існує її власне елементарне розширення $\mathcal{I}^*$, тобто таке, що область M моделі $\mathcal{I}$ є власною підмножиною області M^* моделі $\mathcal{I}^*$, причому множину M^* також можна вважати зліченною.*

У конкретних математичних науках часто фіксується деяка модель M цієї теорії $\mathfrak{T}$, яка зветься «стандартною» (насправді, найчастіше теорію $\mathfrak{T}$ вибирають так, щоб вона описувала «неформальні» властивості математичної структури M). Тоді моделі M^* із теореми 12.4 називаються «нестандартними», а елементи $a \in M \setminus M^*$ — нестандартними елементами моделі M^*.

Основні задачі

12.1. Нехай $\mathbb{N}^* \supseteq \mathbb{N}$ — нестандартна модель теорії натуральних чисел. Доведіть, що $\mathbb{N}^*$ містить «нескінченно велике число», тобто такий елемент $\mathbf{C}$, що $\mathbf{C} > n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Вказівка . Скористайтесь тим, що у множині натуральних чисел для кожного даного n виконується твердження $a \leq n \to a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n$.

12.2. Доведіть твердження

$$\mathrm{val}\,(\mathcal{I},\phi,\mathbf{A}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ \mathfrak{T}^* \vdash \mathbf{A}^{\phi}; \\ 0, & \text{якщо } \ \mathfrak{T}^* \vdash \neg\mathbf{A}^{\phi} \end{cases}$$

із доведення теореми про модель у випадках, коли а) $\mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$, б) $\mathbf{A} = \neg\mathbf{B}$, в) $\mathbf{A} = \forall x\mathbf{B}$.

12.3. Нехай $\mathfrak{T}$ – теорія першого порядку. Доведіть, що тоді або потужності всіх скінченних нормальних моделей цієї теорії обмежені, або $\mathfrak{T}$ має зліченну модель.

12.4. Доведіть твердження: якщо $\mathfrak{T}$ — теорія першого порядку, $\mathcal{I}$ — інтерпретація, в якій всі постулати теорії $\mathfrak{T}$ істинні, F — речення, істинне в M, то $\mathfrak{T} \vdash F$.

12.5. Доведіть, що для кожного нестандартного елемента теорії натуральних чисел a вірно $a > n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

12.6. Нехай $\mathbb{R}^* \supset \mathbb{R}$ - нестандартна модель теорії дійсних чисел. Доведіть, що $\mathbb{R}^*$ містить «нескінченно велике число», тобто такий елемент $\mathbf{C}$, що $\mathbf{C} > n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, і «нескінченно мале число», тобто такий елемент c, що $0 < c < a$ для довільного додатного числа $a \in \mathbb{R}$.

Вказівка . Скористайтеся тим, що у множині дійсних чисел для кожного натурального n мають місце твердження:

1) якщо $0 < a < n$, то для кожного натурального k існує таке натуральне $m_k < nk$, що $m_k/k < a < (m_k + 1)/k$;

2) якщо $c \in \mathbb{R}^*$, $c > 0$ не є нескінченно малим, то доведіть, що послідовність m_k/k збігається, і якщо b — її границя (звичайна), то або $c = b$, або $b - c$ — нескінченно мала величина.

12.7. Покажіть, що в нестандартній моделі дійсних чисел для кожного нестандартного числа a існує єдине стандартне число $st(a)$ таке, що $a - st(a)$ нескінченно мале.

Домашнє завдання

12.8. Покажіть, що в нестандартній моделі дійсних чисел a нескінченно мале $\Leftrightarrow$ a^{-1} – нескінченно велике.

12.9. Архімедове впорядкування визначається так званою «архімедовою властивістю»: не існує такої пари x,y, для якої для довільної кількості доданків $x + ... + x < y$.

Доведіть, що нестандартна модель дійсних чисел має неархімедове впорядкування.

Література.

[**3**, с. 46–50]; [**4**, с. 115–131].

Розділ 4

Формальна арифметика та теорія алгоритмів

Заняття № 13. Основи формальної арифметики

Теоретичні відомості

Означення 13.1. *Формальною арифметикою називають теорію першого порядку з рівністю* $\mathbf{A}$, *яка включає в себе константи* c_0 *та* c_1 *та два двомісні функціонали* S *та* P *і містить постулати*:

Аксіоми 13.2 (постулати формальної арифметики). .

(N1) $v + 1 \neq 0$;

(N2) $v + 1 = v_1 + 1 \to v = v_1$;

(N3) $v + 0 = v$;

(N4) $v + (v_1 + 1) = (v + v_1) + 1$;

(N5) $v \cdot 0 = 0$;

(N6) $v \cdot (v_1 + 1) = v \cdot v_1 + v$;

(N7) $\mathbf{A}_0^v \wedge \forall v(\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{v+1}^v) \to \forall v \mathbf{A}$.

Зауваження 13.3. Ми використовуємо звичні позначення $a+b$ замість Sab, $a \cdot b$ замість Pab, 0 замість c_0, 1 замість c_1, $a = b$ замість Eab.

Основні задачі

13.1. Доведіть, що наведені речення є теоремами формальної арифметики.

1. $xy = 1 \to x = 1 \wedge y = 1$.

2. $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z$.

3. $x \leqslant y \wedge y < z \to x < z$, і $x < y \wedge y \leqslant z \to x < z$.

4. $x < y \leftrightarrow x + z < y + z$.

5. $x < y \wedge z \neq 0 \leftrightarrow xz < yz$.

6. Позначимо $x|y$ речення $\exists z y = xz$.

7. $x|y \wedge y \neq 0 \to x \leqslant y$.

13.2. Доведіть наведені далі твердження, де a,b, $\ldots$, — натуральні числа, $\mathbf{B}a$,$\mathbf{B}b$, $\ldots$, — відповідні терми формальної арифметики, а $\mathbf{A}$ — довільне речення формальної арифметики.

1. Якщо $a < b$, то $\mathfrak{A} \vdash \mathbf{B}a < \mathbf{B}b$ і навпаки (очевидно, якщо $a = b$, то терми $\mathbf{B}a$ і $\mathbf{B}b$ просто збігаються).

2. $\mathfrak{A} \vdash \mathbf{B}a + b = \mathbf{B}a + \mathbf{B}b$ і $\mathfrak{A} \vdash \mathbf{B}ab = \mathbf{B}a\mathbf{B}b$.

3. Нехай $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — поліном з натуральними коефіцієнтами, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — натуральні числа, $b = F(a_1,a_2, \ldots ,a_m)$. Позначимо $\mathbf{B}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ терм формальної арифметики, який одержується з F, якщо кожний коефіцієнт c замінити термом $\mathbf{B}c$. Тоді $\mathfrak{A} \vdash \mathbf{B}F(\mathbf{B}a_1, \mathbf{B}a_2, \ldots, \mathbf{B}a_m) = \mathbf{B}b$.

4. $\mathbf{A}(0) \wedge \mathbf{A}(1) \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}(\mathbf{B}n) \equiv_{\mathfrak{A}} \forall x\big(x \leqslant \mathbf{B}n \to \mathbf{A}(x)\big)$.

13.3. Виведіть із попередньої задачі, що кожна модель формальної арифметики містить підмодель, ізоморфну стандартній.

13.4. Доведіть, що кожна замкнута елементарна формула $x = y$ теорії $\mathbf{A}$ розв'язна в $\mathbf{A}$ (тобто або $\vdash_{\mathbf{A}} x = y$, або $\vdash_{\mathbf{A}} x \neq y$).

13.5. Доведіть, що кожна замкнута безкванторна формула теорії $\mathbf{A}$ розв'язна в $\mathbf{A}$.

Додаткові задачі

13.6. Доведіть «китайську теорему про лишки»:
Якщо натуральні числа d_1,...,d_n попарно співпервинні, то для довільних натуральних c_1,...,c_n існує таке натуральне a, що $a \equiv c_k (mod d_k)$ для всіх $k = 1$,...,n.

Вказівка . При $n = 2$ скористайтесь тим, що існують такі цілі числа b_1,b_2, що $b_1c_1 + b_2c_2 = 1$.

13.7. Покажіть, що існує нестандартна модель теорії **A** довільної потужності.

13.8. Якщо прибрати з теорії **A** функціонал P та всі відповідні аксіоми, то одержимо повну та розв'язну теорію. Доведіть цей факт.

Домашнє завдання

13.9. Доведіть, що наступні речення є теоремами формальної арифметики.

1. $x + y = 1 \to (x = 1 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 1)$.
2. $x < y \to \neg y < x$.
3. $x|y \wedge y|z \to x|z$.

13.10. Доведіть наведені далі твердження, де a,b, …, — натуральні числа, $\mathbf{B}a$,$\mathbf{B}b$, …, — відповідні терми формальної арифметики, а **A** — довільне речення формальної арифметики.

1) $\mathbf{A}(0) \vee \mathbf{A}(1) \vee \cdots \vee \mathbf{A}(\mathbf{B}n) \equiv_{\mathfrak{A}} \exists x\big(x \leqslant \mathbf{B}n \wedge \mathbf{A}(x)\big)$.

2) («Принцип нескінченного спуску»)

$$\mathfrak{A} \vdash \forall x\big(\mathbf{A}(x) \to \exists y\big(\mathbf{A}(y) \wedge y < x\big)\big) \to \forall x \neg \mathbf{A}(x).$$

Виведіть звідси, що кожна модель формальної арифметики містить підмодель, ізоморфну стандартній.

Література.

[**3**, с. 60–66]; [**4**, с. 115–131].

Заняття № 14. Машини Т'юрінга

Теоретичні відомості

Означення 14.1.
Машина Т'юрінга визначається набором (Σ, Q, δ):

- $\Sigma = \{s_0, s_1, ..., s_k\}$ — *алфавіт, який включає в себе порожній символ* 0;
- $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$ — *скінчена множина станів, яка обов'язково включає в себе стани* q_1 *(початковий стан) та стан* q_0 *(стан виходу)*;
- δ — *функція, яка визначає програму машини*; $\delta{:}(Q \setminus \{q_0\}) \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{L, R, S\}$. *Символи* L, R, S *позначають інструкцію для зчитувального пристрою машини — рухатись вліво, рухатись вправо, залишатись на місці.*

Крім того, в машину входять:

- *Нескінченна в обидві боки стрічка, розбита на окремі клітини-«поля». У кожне поле вписується один символ алфавіту* Σ, *причому лише скінченна кількість полів містить непорожній (ненульовий) символ.*
- *Зчитувальний пристрій машини, який за одиницю часу виконує дії*:
  - *зчитує символ вхідного алфавіту, який знаходиться на полі, на якому опинився в даний момент зчитувальний пристрій*;
  - *записує в цьому самому полі деякий символ з алфавіту* Σ;
  - *переходить на сусіднє ліворуч* (L), *сусіднє праворуч* (R) *поле, або залишається на місці* (S).

Означення 14.2.

1. *Машина Т'юрінга обчислює функцію* f, *якщо для кожного* x *при початковій конфігурації машини* (q_1, x), *кінцевою конфігурацією буде* $(q_0, f(x))$, *якщо* x *належить області визначеності функції* f *і машина не зупиниться в іншому випадку.*

2. *Функція називається обчислюваною за Т'юрінгом, якщо існує машина Т'юрінга, яка її обчислює.*

Зауваження 14.3.

1. Тут і далі натуральними числами вважатимемо числа множини $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,...\}$.

2. При застосуванні машин Т'юрінга до арифметики (натуральних чисел) вважається, що алфавітом є множина $\{0,1\}$, а натуральне число x зображується як $x+1$ одиниця, записана на стрічці підряд, зчитувальний пристрій при цьому розташований на крайній одиниці праворуч:

$$...000\underbrace{1...1}_{x+1}000...$$

3. Вектор із натуральних чисел $(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ ототожнюється з послідовністю зображень чисел $x_1,...,x_n$, між якими стоїть по одному нулю:

$$...000\underbrace{1...1}_{x_1+1}0\underbrace{1...1}_{x_2+1}0...0\underbrace{1...1}_{x_n+1}000...$$

   Зчитувальний пристрій знову розташовано на крайній одиниці праворуч.

Тут і далі, де не вказано інше, ми будемо працювати саме з таким вхідним алфавітом і такими домовленостями.

Означення 14.4. *Функція $f{:}\Sigma \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ обчислюється алгоритмічно, якщо існує алгоритм для обчислення значень функції f.*

Твердження 14.5 (теза Т'юрінга). *Функція f обчислюється алгоритмічно тоді й лише тоді, коли вона обчислювана за Т'юрінгом.*

Означення 14.4 та твердження 14.5 насправді не є коректними алгебраїчними формулюваннями. Вони обидва є інтуїтивними.

Приклад 14.6. *Побудуйте машину Т'юрінга з алфавітом $\Sigma = \{a,b,0\}$, яка замінює на стрічці всі літери a на b і виходить, коли зустрічає на стрічці порожню позицію.*

Розв'язання ✎. За означенням 14.1, для того щоб задати машину Т'юрінга необхідно і достатньо задати: алфавіт Σ, множину станів Q та функцію δ, яка описує програму машини. Алфавіт у нас задано за умовою. Почнемо описувати програму, а з неї одержимо необхідний набір станів.

Починаємо завжди зі стану q_1.

1. Якщо в цьому стані ми зустрічаємо елемент a, то замінюємо його на 0, йдемо далі вправо, залишаючись при цьому в стані q_1.
2. Елемент b залишаємо на місці і продовжуємо рух, також не змінюючи стану.
3. Елемент 0 також залишаємо на місці, але виходимо з програми — тобто переходимо до стану q_0.

Для кращого розуміння представимо це як таблицю:

Пункт	**Стан**	**Елемент**	**Дія**
1	q_1	a	$(q_1,0,R)$
2	q_1	b	(q_1,b,R)
3	q_1	0	$(q_0,0,S)$

Оскільки щоразу ми залишаємось у стані q_1, програма визначена для цього стану буде продовжуватись доки ми не зустрінемо 0.

Таким чином, множина внутрішніх станів $Q = \{q_0,q_1\}$, а відображення δ можна задати таблично (як вказано вище), або формально:

$$\begin{aligned}\delta(q_1,a) &= (q_1,0,R);\\ \delta(q_1,b) &= (q_1,b,R);\\ \delta(q_1,0) &= (q_0,0,S).\end{aligned}$$

Основні задачі

14.1. Нехай задано машину Т'юрінга з початковим станом q_1, станом виходу q_0, алфавітом $\{a,b,0\}$ і програмою:

$\delta(q_1,a) = (q_2,0,R)$; $\delta(q_1,b) = (q_4,0,R)$; $\delta(q_1,0) = (q_1,0,0)$;

$\delta(q_2,a) = (q_2,a,R)$; $\delta(q_2,b) = (q_2,b,R)$; $\delta(q_2,0) = (q_3,0,L)$;

$\delta(q_3,a) = (q_4,0,L)$; $\delta(q_3,0) = (q_3,0,S)$;
$\delta(q_4,a) = (q_4,a,L)$; $\delta(q_4,b) = (q_4,b,L)$; $\delta(q_4,0) = (q_1,0,R)$;
$\delta(q_4,a) = (q_4,a,R)$; $\delta(q_4,b) = (q_4,b,R)$; $\delta(q_4,0) = (q_0,0,L)$;
$\delta(q_0,b) = (q_4,0,L)$; $\delta(q_0,0) = (q_0,0,S)$.

1. Вкажіть стани та алфавіт заданої машини.

2. Прослідкуйте роботу заданої машини, якій було задано на вході стрічку $baaab0$.

3. Чому в програмі опущено правила $\delta(q_3,b)$ та $\delta(q_0,a)$? Що робитиме машина, якщо опиниться в одному з таких станів?

4. Придумайте стрічку, яка зациклить вказану машину.

5. Придумайте стрічку, для якої вказана машина видасть результат $0abba0$.

6. Які результати взагалі може видати ця машина?

14.2. Скільки існує різних машин Т'юрінга з k-елементним алфавітом і m внутрішніми станами?

14.3. Побудувати машину Т'юрінга, яка обчислює:

1) $f(x_1) = x_1 + 1$;

2) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$;

3) $f(x) = xx$ (копіювання слова);

4) $f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i mod 2$.

14.4. Навести приклад машини Т'юрінга, яка

1) працює, не зупиняючись, незалежно від уведеної стрічки даних;

2) обов'язково зупиняється, незалежно від уведеної стрічки даних;

3) працює, не зупиняючись, для нескінченної кількості можливих увідних даних і обов'язково зупиняється для нескінченної кількості можливих увідних даних.

14.5. Яку процедуру виконує машина Т'юрінга з програмою команд:

$\delta(q_1,0) = (q_2,0,R)$; $\delta(q_1,1) = (q_0,1,S)$; $\delta(q_2,1) = (q_2,1,R)$;
$\delta(q_2,0) = (q_3,1,L)$; $\delta(q_3,1) = (q_3,1,L)$; $\delta(q_3,0) = (q_0,0,S)$?
На невказаних аргументах машина відразу зупиняється.

14.6. Побудувати машину Т'юрінга, яка

1) проходить по стрічці вправо поки не зустрічає число. Зустрівши, зупиняється на його останній одиниці праворуч;

2) міняє місцями розташовані на стрічці два числа x_1 та x_2. Вважати, що між числами лежить один нуль і зчитувальний пристрій напочатку знаходиться на ньому.

14.7. Побудувати машину Т'юрінга, яка обчислює:

1) $f(x) = x^2$;

2) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$.

14.8. За допомогою побудованих у задачах 14.3 та 14.7 машин Т'юрінга

1) перевірити, що $2 + 2 = 4$;

2) обчислити $1 + 3$;

3) розв'язати рівняння $x + x = 4$;

4) розв'язати рівняння $x^2 = 4$;

5) розв'язати рівняння $x \cdot y = 3$.

Додаткові задачі

14.9. Чи є розв'язною наведена задача? Відповідь обґрунтуйте.

Нехай задано машину Т'юрінга T та стрічку w. Чи буде машина Т'юрінга працювати нескінченно, якщо їй на вхід подати цю стрічку?

14.10. Побудувати машину Т'юрінга, яка обчислює найбільше ціле число, що не перевищує $x/2$.

Домашнє завдання

14.11. З'ясувати, яку процедуру виконує машина Т'юрінга з такою програмою команд:
$\delta(q_1,0) = (q_2,0,R)$; $\delta(q_2,0) = (q_0,1,S)$;
$\delta(q_1,1) = (q_1,1,R)$; $\delta(q_2,1) = (q_2,1,R)$.

14.12. Побудувати машину Т'юрінга, яка обчислює:

$$f(x_1,x_2) = x_1 \dot{-} x_2 \colon = \begin{cases} x_1 - x_2, & \text{якщо } x_1 \geq x_2; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

14.13. За допомогою побудованих у задачах 14.3 та 14.7 машин Т'юрінга

1) перевірити, що $2 \cdot 2 = 4$;

2) розв'язати рівняння $x + y = 3$.

14.14. Побудувати машину Т'юрінга з алфавітом $\Sigma = \{a,b,0\}$, яка шукає на стрічці послідовності:

1) *abba*;

2) *baba*;

3) *abab*.

Якщо вона їх знаходить, то зупиняється біля лівого символу послідовності. Якщо такої послідовності на стрічці немає, машина працює, не зупиняючись.

Література.

[**4**, с. 251–260].

Заняття № 15. Примітивно рекурсивні функції

Теоретичні відомості

Визначення примітивно рекурсивних функцій складається з трьох етапів. Перш за все вводимо «найпростіші» функції. Далі формулюємо правила, за допомогою яких одержуються всі інші примітивно рекурсивні функції. І нарешті даємо остаточне коректне означення.

ОЗНАЧЕННЯ 15.1.
Наведемо найпростіші примітивно рекурсивні функції:

1) $o(x) = 0$;

2) $s(x) = x + 1$;

3) $\mathcal{I}_n^m(x_1,\dots,x_n) = x_m$ *(«вибір» m-тої координати вектора; звичайно тут* $1 \le m \le n, n = 1,2,\dots$*)*.

ОЗНАЧЕННЯ 15.2. *Суперпозицією часткових функцій*

$$f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n),\phi(x_1,\dots,x_m)$$

над множиною натуральних чисел називається функція $g(x_1,\dots,x_n)$*, визначена рівністю*

$$g(x_1,\dots,x_n) = \phi(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)).$$

Якщо ми вже маємо алгоритми для обчислення значень $f_1,\dots,f_m,\phi$*, то ми можемо записати алгоритм для обчислення значень* g *на векторі* $(a_1,\dots,a_n)$:

АЛГОРИТМ 15.3. *Обчислення суперпозиції часткових функцій*

1) *Обчислити значення* f_i *на* $(a_1,\dots,a_n)$.

Якщо хоча б одна з функцій f_i *не визначена на цьому векторі, то і суперпозиція не визначена. Якщо ж це не так, покладемо*

$$f_i(a_1,\dots,a_n) = b_i, \ \ 1 \le i \le m.$$

2) *Обчислити* $\phi(b_1,\dots,b_m)$*. Якщо* ϕ *не визначена на цьому векторі, то і суперпозиція не визначена. В іншому разі покладемо*

$$g(a_1,\dots,a_n) = \phi(b_1,\dots,b_m).$$

Зауваження 15.4. Насправді функції $f_1,...,f_n,\phi$ можуть залежати від різної кількості змінних, оскільки функція $\mathcal{I}_n^m$ дозволяє нам «вирівняти» цю кількість.

Означення 15.5. *Функція $f(x_1,...,x_n)$ визначаеться через функції ϕ та ψ за допомогою схеми примітивної рекурсії, якщо*

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,x_2,...,x_{n-1},0) & = & \phi(x_1,x_2,...,x_{n-1}) \\ f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y+1) & = & \psi(x_1,x_2,...,x_{n-1},y,f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y)),y>0. \end{array}$$

Якщо нам відомі алгоритми для обчислення значень функцій ϕ та ψ, ми можемо записати алгоритм для обчислення значень функції f на векторі $(a_1,...,a_n)$:

Алгоритм 15.6. *Схема примітивної рекурсії.*

1. *Обчислити $\phi(a_1,...,a_{n-1} = b_0$ та покласти*

$$f(a_1,...,a_{n-1},0) = :b_0.$$

2. *Послідовно обчислити*

$$\begin{array}{rcl} f(a_1,a_2,...,a_{n-1},1) & = & \psi(q_1,a_2,...,a_{n-1},0,b_0) = :b_1; \\ f(a_1,a_2,...,a_{n-1},2) & = & \psi(q_1,a_2,...,a_{n-1},1,b_1) = :b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n) & = & \psi(q_1,a_2,...,a_{n-1},a_n-1,b_{a_n-1}) = :b_{a_n}. \end{array}$$

Означення 15.7. *Функція f над множиною натуральних чисел називається примітивно рекурсивною, якщо вона*

- *найпростіша функція* 15.1,
- *суперпозиція примітивно рекурсивних функцій* 15.2 *або*
- *утворюеться за схемою примітивної рекурсії* 15.5.

Приклад 15.8. *Перевірити, що функція $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ є примітивно рекурсивною.*

Розв'язання ✎. Застосуймо схему примітивної рекурсії. Спочатку пояснімо, як рекурсивно визначити суму двох чисел:

x_1 — це буде нашою «базою», функцією ϕ;

$x_1 + 1$ — це буде першим кроком визначення ψ;

.....

$x_1 + x_2$ — це буде x_2гим кроком визначення ψ.

Відповідно визначимо формально функції φ та ψ:

$\phi(x) = \mathcal{I}_1^1(x_1) = x_1$ (рекурсивна як елементарна — 15.1);

$\psi(x_1,x_2,x_3) = s(\mathcal{I}_3^3(x_1,x_2,x_3)) = x_3 + 1$ (рекурсивна як суперпозиція — 15.2).

За означенням 15.5, одержимо примітивно рекурсивну функцію $g(x_1,x_2)$ таку, що

$$\begin{array}{rcl} g(x_1,0) & = & \phi(x_1) = x_1; \\ g(x_1,1) & = & \psi(x_1,0,g(x_1,0)) = g(x_1,0) + 1 = x_1 + 1; \\ g(x_1,2) & = & \psi(x_1,0,g(x_1,1)) = g(x_1,1) + 1 = x_1 + 2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Основні задачі

15.1. Довести, що якщо функція $f(x_1,...,x_n)$ примітивно рекурсивна, то функція $g(x_1,...,x_n) = f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})$ (де σ — деяка перестановка $\{1,...,n\}$) також примітивно рекурсивна.

15.2. Перевірити, що наступні функції є примітивно рекурсивними:

1) $f(x) = n$ (n — фіксоване натуральне число);

2) $f(x) = x!$;

3) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$;

4) $f(x) = sign(x) := \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ в іншому разі} \end{cases}$;

5) $f(x_1,x_2) = x_1 \dot{-} x_2$;

6) $f(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2)$;

7) $f(x_1,x_2) = [x_1/x_2]$, $[x_1/0] = x_1$ (нагадаємо, що через [] ми позначаємо цілу частину).

15.3. Перевірити, що примітивно рекурсивними функціями будуть:

1) $g(x) =$ кількість натуральних дільників числа x (вважаючи кількість дільників нуля рівною 0);

2) $g(x) =$ кількість простих чисел, що не перевищують x;

3) $g(x) =$ просте число номер x (у впорядкованій зростаючій послідовності всіх простих чисел);

4) $f(x) = [\sqrt{x}]$.

Додаткові задачі

15.4. Довести, що наведені функції не можна одержати тільки з функцій o та $\mathcal{I}_n^m$ за допомогою суперпозиції та схеми примітивної рекурсії:

1) $f(x) = x^2 + 1$;

2) $f(x) = 3x \dot{-} 1$;

3) $f(x) = 2x$.

Чи будуть ці функції примітивно рекурсивними? Що це демонструє?

Домашнє завдання

15.5. Перевірити, що такі функції є примітивно рекурсивними:

1) $f(x_1,x_2) = x_1^{x_2}$;

2) $f(x) = \overline{sign}(x) := 1 - sign(x)$;

3) $f(x) = x \dot{-} 1$.

15.6. Довести, що якщо функція $f(x_1,...,x_n)$ примітивно рекурсивна, то функція $h(x_1,..,x_n,x_{n+1}) = f(x_1,...,x_n)$ також примітивно рекурсивна.

Заняття № 16. Частково рекурсивні функції

Теоретичні відомості

Означення 16.1 (оператор мінімізації). *Нехай $f(x_1,...,x_n)$ — часткова функція над множиною натуральних чисел. Зафіксуємо $x_1 = a_1,...,x_{n-1} = a_{n-1}$ і розглянемо рівняння від однієї невідомої y:*

$$f(a_1,...,a_{n-1},y) = 0. \tag{29}$$

Якщо це рівняння має розв'язки, серед них можна обрати мінімальний. Позначимо його a і покладемо $\mu y[f(a_1,...,a_{n-1},y) = 0] = a$, якщо $f(a_1,...,a_{n-1},b)$ визначена при $b < a$ і $\neq 0$, а $f(a_1,...,a_{n-1},a) = 0$.

Фіксуючи різні вектори $(a_1,...,a_{n-1})$, одержимо різні мінімальні розв'язки (29). Визначимо через них нову функцію ϕ:

$$\phi(x_1,...,x_{n-1}) = \mu y[f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y) = 0].$$

Функція ϕ в загальному випадку частково визначена (рівняння (29) може не мати жодного розв'язку). Її називають функцією, утвореною з f через застосування оператора мінімізації (μ-оператора).

Алгоритм 16.2. *Алгоритм знаходження значень функції ϕ на векторі $(a_1,...,a_{n-1})$ такий.*

1. *Знайти $f(a_1,...,a_{n-1},0)$. Якщо це 0, то $\phi(a_1,...,a_{n-1}) = 0$.*
2. *Якщо $f(a_1,...,a_{n-1},0) \neq 0$, обчислюємо $f(a_1,...,a_{n-1},1)$. Якщо це 0, то $\phi(a_1,...,a_{n-1}) = 1$.*
3. *Якщо $f(a_1,...,a_{n-1},1) \neq 0$, обчислюємо $f(a_1,...,a_{n-1},2)$. І так далі.*

На певному кроці ми знайдемо таке найменше можливе натуральне число k, що $f(a_1,...,a_{n-1},k) = 0$.

$$\phi(a_1,...,a_{n-1}) = k.$$

Якщо на якомусь кроці функція f невизначена, то і ϕ невизначена. Можливою є ситуація, що ми ніколи не одержимо 0. Тоді ϕ також невизначена.

Означення 16.3. *Часткова функція f над множиною натуральних чисел називається частково рекурсивною, якщо вона є*

- *найпростішою функцією* 15.1,
- *суперпозицією частково рекурсивних функцій* 15.2,
- *одержаною за допомогою схеми примітивної рекурсії з частково рекурсивних функцій* 15.5 *або*
- *одержаною з частково рекурсивної функції через застосування оператора мінімізації* 16.1.

Іншими словами, це означає, що існує скінченна послідовність часткових функцій $f_1,...,f_n$ така, що кожна f_i

- *найпростіша,*
- *суперпозиція $f_{k_1},...,f_{k_j}$, причому всі $k_r < i$,*
- *одержана за допомогою схеми примітивної рекурсії з деяких f_k,f_j, причому $k < i,j < i$ або*
- *одержана через застосування оператора мінімізації з деякого f_k, причому $k < i$.*

Твердження 16.4. *Клас функцій обчислюваних за Т'юрінгом збігається з класом частково рекурсивних функцій.*

Приклад 16.5. *Довести, що функція*

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, \text{ якщо } x_1 = x_2, \\ \text{не визначена в інших випадках} \end{cases}$$

є частково рекурсивною.

Розв'язання ✎. Оскільки на цей момент ми ще не знаємо майже ніяких частково рекурсивних функцій, спробуємо застосувати оператор мінімізації.

Побудуємо функцію від трьох змінних x_1,x_2,y:

$$g(x_1,x_2,y) = ((x_1 + x_2)\dot{-}y) + |x_1 - x_2|.$$

Справді, $x_1 = x_2 \leftrightarrow |x_1 - x_2| = 0$, і мінімальний корінь рівняння

$$g(x_1,x_1,y) = ((2x_1)\dot{-}y) = 0$$

очевидно буде $y = 2x_1$.

З іншого боку, якщо $x_1 \neq x_2$, розглянемо нашу функцію

$$g(x_1,x_2,y) = (\underbrace{(x_1 + x_2)\dot{-}y}_{>0}) + \underbrace{|x_1 - x_2|}_{>0}. \tag{30}$$

Але $|x_1 - x_2|$ в такому випадку завжди > 0. Вираз $(x_1 + x_2)\dot{-}y$ може за означенням набувати мінімального значення 0, отже, вираз (30) завжди > 0.

Відповідно

$$\phi(x_1,x_2) = \mu y[g(x_1,x_2,y) = 0] = \begin{cases} 2x_1 = x_1 + x_2 \text{ якщо } x_1 = x_2; \\ \text{невизначена в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, ϕ визначена на області визначення f: для кожної точки (x_1,x_2) з цієї області $f(x_1,x_2) = \phi(x_1,x_2)$. Отже, f частково рекурсивна, як одержана за допомогою застосування оператора мінімізації до частково рекурсивної функції (модуль, симетрична різниця та сума примітивно ми показали в попередньому занятті).

Основні задачі

16.1. μ-оператор можна застосовувати в альтернативних формах, наприклад:

1) $\phi(x_1,...,x_{n-1}) = \mu y[f_1(x_1,...,x_{n-1},y) < f_2(x_1,...,x_{n-1},y)]$;

2) $\phi(x_1,...,x_{n-1}) = \mu y[f_1(x_1,...,x_{n-1},y) > f_2(x_1,...,x_{n-1},y)]$.

Перевірити, що це справді так.

16.2. Довести, що функції є частково рекурсивними:

1) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x_1^2 = x_2; \\ \text{не визначена в іншому разі,} \end{cases}$;

2) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, \text{ якщо } x_1^2 + x_2^2 \leq 1; \\ \text{не визначена в іншому разі,} \end{cases}$;

3) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1/x_2, \text{ якщо } x_1 \text{ ділиться на } x_2; \\ \text{не визначена в іншому разі.} \end{cases}$.

16.3. Кажуть, що функція $f(x)$ одержана з $g(x)$ за допомогою ітерації, якщо $f(0) = 0, f(x+1) = g(f(x)), x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Довести, що функцію f можна одержати з g за допомогою ітерації:

1) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x + 1 + [\sqrt{4x+1}]$;

2) $f(x) = sign(x)$, $g(x) = 1 + [x/2]$;

3) $f(x) = 2x \dot{-} 1$, $g(x) = x + 1 + [(x+1)/2] - [x/2]$;

4) $f(x) = 2^{x-1} \dot{-} \overline{sign}(x)$, $g(x) = \overline{sign}(x) + 2x$.

16.4. Кажуть, що часткова функція $f(x)$ одержана з функції $g(x)$ за допомогою взяття оберненої функції, якщо

$$f(x) = \mu y[g(y) = x]$$

для всіх x з області визначення f. Позначають $f(x) = g^{-1}(x)$.

Довести, що має місце співвідношення $f(x) = g^{-1}(x)$ для таких функцій:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$;

2) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$;

3) $f(x) = x/2$, $g(x) = 2x$;

4) $f(x) = 0 \dot{-} x$, $g(x) = o(x)$.

16.5. Довести, що функцію f можна одержати з функцій g, h за допомогою

1) суперпозиції, ітерації та додавання двох функцій;

2) суперпозиції, взяття оберненої та додавання двох функцій

для наступних значень f, g, h:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$;

2) $f(x) = [x/2]$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$.

Домашнє завдання

16.6. Довести, що функцію f можна одержати з функцій g,h за допомогою

1) суперпозиції, ітерації та додавання двох функцій;

2) суперпозиції, взяття оберненої та додавання двох функцій.

1) $f(x) = [\sqrt{x}]$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$;

2) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$.

16.7. μ-оператор можна застосовувати в альтернативних формах, наприклад:

$$\phi(x_1,...,x_{n-1}) = \mu y[f_1(x_1,...,x_{n-1},y) = f_2(x_1,...,x_{n-1},y)].$$

Перевірити, що це справді так.

16.8. Довести, що наступна функція є частково рекурсивною:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1, \text{ якщо } x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ \text{не визначена в іншому разі} \end{cases}.$$

Література.

[**3**, с. 72–79]; [**4**, с. 135–150].

Заняття № 17. Ґеделеві номери

Теоретичні відомості

Оскільки ми розглядатимемо не тільки окремі речення, а і їх послідовності, розширимо дещо наш алфавіт, додавши до нього символ _. Таким чином, алфавіт арифметики складатиметься з 16 символів:

$$0 \quad 1 \quad \mathrm{v} \quad | \quad E \quad S \quad P \quad \vee \quad \wedge \quad \rightarrow \quad \neg \quad \forall \quad \exists \quad (\quad) \quad \_$$

Означення 17.1 (ґеделеві номери).

1. *Ґеделеві номери літер алфавіту $\mathcal{A}$ визначаються таблицею*:

0	1	v	|	E	S	P	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	(	)	_
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

   Ґеделів номер літери a позначається $\gamma(a)$.

2. *Ґеделів номер слова $w = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ в алфавіті $\mathcal{A}$ визначається як*

$$\gamma(w) = 16^n \gamma(a_n) + 16^{n-1}\gamma(a_{n-1}) + \dots + 16\gamma(a_1) + \gamma(a_0).$$

   Іншими словами, ґеделів номер слова — це число, 16-річний запис якого складається з ґеделевих номерів його літер (у тому самому порядку). Зауважимо, що згідно зі звичаєм ми нумеруємо цифри (а тому й літери) справа наліво.

Із цього означення випливає, що функція γ встановлює взаємно однозначну відповідність між словами в алфавіті $\mathcal{A}$, які не починаються з 0, *та натуральними числами. Надалі ми часто казатимемо «номер слова» замість «ґеделів номер», оскільки ніяких інших номерів словам в алфавіті $\mathcal{A}$ ми не приписуємо.*

Теорема 17.2 (теорема Ґеделя про неповноту). *Існує замкнене речення Γ формальної арифметики, яке істинне в її стандартній моделі $\mathcal{N}$, але не виводиться у формальній арифметиці.*

Оскільки в задачах ми використовуємо доведення теореми Ґеделя 17.2, зробимо вийняток і наведемо його в повному обсязі.

Доведення. Розглянемо відношення $G(x,y)$ — «x — ґеделів номер якогось речення $\mathbf{A}$, а y — номер виводу речення $\mathbf{A}_x^{\mathrm{v}}$». Воно примітивно рекурсивне: $G(x,y) = \mathrm{Ded}\,(y, \mathrm{Sub}\,(x,\gamma(x),2))$. (Як завжди, ми пишемо $\gamma(x)$ замість $\gamma(\mathbf{B}x)$; легко бачити, що ця функція примітивно рекурсивна.) Тому існує речення $\mathbf{G}(x,y)$, яке правильно виражає це відношення. Очевидно, можна вважати, що $\mathbf{G}$ не містить вільних змінних, крім x і y. Перейменування змінних дозволяє припустити, що $x = \mathrm{v}$. Позначимо n ґеделів номер речення $\neg\exists y\mathbf{G}(\mathrm{v},y)$ і покладемо $\Gamma = \neg\exists y\mathbf{G}(n,y)$. Тоді $\gamma(\Gamma) = \mathrm{Sub}\,(n,\gamma(n),2)$. Припустимо, що $\mathfrak{A} \vdash \Gamma$ і m — ґеделів номер якогось виводу цього речення. Тоді, за означенням, $G(n,m)$ істинне, тому $\mathfrak{A} \vdash \mathbf{G}(n,m)$ і $\mathfrak{A} \vdash \exists y\mathbf{G}(n,y)$, тобто $\mathfrak{A} \vdash \neg\Gamma$. Це неможливо, якщо вважати теорію $\mathfrak{A}$ несуперечливою (що випливає з гіпотези про стандартну модель). Отже, речення Γ не можна вивести у формальній арифметиці.

З іншого боку, якщо речення $\exists y\mathbf{G}(n,y)$ істинне у стандартній моделі, то знайдеться натуральне число m таке, що істинним у цій моделі буде речення $\mathbf{G}(n,m)$. Тоді $G(n,m)$ — істинне (бо $\mathfrak{A} \vdash \neg\mathbf{G}(n,m)$ неможливо), отже, m — номер виводу речення Γ. Ми вже бачили, що це неможливо. Тому речення $\exists y\mathbf{G}(n,y)$ хибне, а його заперечення, тобто речення Γ, істинне у стандартній моделі. $\square$

Означення 17.3. *Теорія* $\mathbf{A}$ *називається* ω*-несуперечливою, якщо не існує такого речення* $\mathbf{A}(v)$ *теорії* $\mathbf{A}$*, що одночасно*

- $\mathbf{A} \vdash \neg\mathbf{A}(\bar{n})$ *для кожного натурального* n *і*
- $\mathbf{A} \vdash \exists v\mathbf{A}$.

Приклад 17.4. *Обчислити ґеделів номер постулату* Evv.

Розв'язання ✎.

$$\begin{aligned}\gamma(Evv) &= 16^2 \cdot \gamma(E) + 16^1 \cdot \gamma(v) + 16^0 \cdot \gamma(v) = \\ &= 16^2 \cdot 4 + 16 \cdot 2 \cdot 2 = 1072.\end{aligned}$$

Приклад 17.5. *Обчислити ґеделів номер терму* $\bar{n}$.

Розв'язання ✎. Розпишемо терм $\bar{n}$:
$\bar{n} = \underbrace{SS...S}_{n-1}\underbrace{11...1}_{n}$.

Тоді ґеделів номер терму обчислюємо:

$$\begin{aligned}\gamma(\bar{n}) &= \underbrace{16^{2n-2}\cdot\gamma(S) + 16^{2n-3}\cdot\gamma(S) + ... + 16^{n}\cdot\gamma(S)}_{n-1} + \\ &+ \underbrace{16^{n-1}\cdot\gamma(1) + 16^{n-2}\cdot\gamma(1) + ... + 16^{0}\cdot\gamma(1)}_{n}.\end{aligned}$$

Основні задачі

17.1. Побудувати об'єкти, які мають такі ґеделеві номери:

1) 2009; 3) 1944; 5) 32.

2) 1976; 4) 1917;

17.2. Перевірити, що наведені відношення та функції на множині натуральних чисел є примітивно рекурсивними.

1. Var (x) — «x — ґеделів номер змінної».
2. Atom (x) — «x — ґеделів номер атома (елементарного речення)».
3. MP (x,y,z) — «речення з номером x, одержане за правилом modus ponens з речень з номерами y та z».
4. Occ (x,y,z) — «змінна з номером y входить у речення з номером x, причому перша ліворуч цифра цього входження знаходиться на z-му місці у 16-річному записі числа x».
5. Oct (x,y) — «змінна з номером y входить у терм з ґеделів номером x».
6. Dom (x,y,z) — «у реченні з номером x входження змінної, 16-річний запис якого починається із z-го місця, знаходиться в області квантора Qv, де v — змінна з номером y».
7. Sub (x,y,z) — «номер речення, одержаного з речення з номером x підстановкою терму з номером y замість змінної з номером z».
8. Gen (x,y) — «речення з номером x, одержане з речення з номером y узагальненням».

9. $\mathrm{Tfr}\,(x,y,z)$ — «терм з номером y є вільним для змінної з номером y у реченні з номером z».
10. $\mathrm{Ax}\,(x)$ — «x — ґеделів номер аксіоми або постулату».
11. $\mathrm{Ded}\,(x,y)$ — «x — номер виводу (у формальній арифметиці) речення з номером y».

17.3. Перевірте, що доведення теореми Ґеделя 17.2 можна переробити так, щоб у ньому використовувалась лише ω-несуперечність формальної арифметики.

17.4. Нехай $\mathbf{G}(\mathrm{v},y)$ має той самий зміст, що й у доведенні теореми 17.2, а речення $\mathbf{H}(\mathrm{v},y)$ правильно виражає відношення «x — номер якогось речення, а y — номер виводу речення $\neg\mathbf{A}_x^{\mathrm{v}}$». Позначимо n ґеделів номер речення

$$\forall y\big(\mathbf{G}(\mathrm{v},y) \to \exists z(z < y \wedge \mathbf{H}(\mathrm{v},z))\big).$$

Довести, користуючись лише несуперечливістю формальної арифметики, що ані речення Россера

$$\mathrm{P} = \forall y\big(\mathbf{G}(n,y) \to \exists z(z < y \wedge \mathbf{H}(n,z))\big),$$

ані його заперечення не виводяться у формальній арифметиці.

Розв'язання ✎. Можлива схема доведення:

Якщо m — номер якогось виводу P, то знайдеться $m' < m$ таке, що m' — номер виводу $\neg$P.

Якщо m — номер якогось виводу $\neg$P, то $\mathfrak{A} \vdash y \leqslant m \to \neg\mathbf{G}(n,y)$. З іншого боку, $\mathfrak{A} \vdash m < y \to \exists z(z < y \wedge \mathbf{H}(n,z))$.

Звідси $\mathfrak{A} \vdash \neg\mathrm{P} \vee \leqslant y \to \exists z(z < y \wedge \mathbf{H}(n,z))$, отже, $\mathfrak{A} \vdash \mathrm{P}$.

17.5. Довести, що речення Россера, визначене в задачі 17.4, є істинним у стандартній моделі арифметики.

Домашнє завдання

17.6. Обчислити ґеделів номер речення $\forall x P(x,y)$.

17.7. Побудувати об'єкт з ґеделів номером 47.

17.8. Перевірити, що такі відношення та функції на множині натуральних чисел є примітивно рекурсивними.

1. $\mathrm{Term}\,(x)$ — «x — ґеделів номер терма».

2. Sent (x) — «x — ґеделів номер речення».

3. Free (x,y,z) — «входження змінної з номером y у речення з номером x, 16-річний запис якого починається з z-го місця, є вільним».

Література.

[**3**, с. 80–85]; [**4**, с. 151–157].

Заняття № 18. Система Робінсона

Теоретичні відомості

Означення 18.1. *Системою Робінсона ми називатимемо теорію першого порядку з рівністю* $\mathfrak{R}$, *що містить всі символи теорії* $\mathbf{A}$ (13.1) *та постулати*:

Аксіоми 18.2 (постулати системи Робінсона).

(R1) $x_1 = x_1$;

(R2) $x_1 = x_2 \to x_2 = x_1$;

(R3) $x_1 = x_2 \to (x_2 = x_3 \to x_1 = x_3)$;

(R4) $x_1 = x_2 \to x_1 + 1 = x_2 + 1$;

(R5) $x_1 = x_2 \to (x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \wedge x_3 + x_1 = x_3 + x_2)$;

(R6) $x_1 = x_2 \to (x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \wedge x_3 \cdot x_1 = x_3 \cdot x_2)$;

(R7) $x_1 + 1 = x_2 + 1 \to x_1 = x_2$;

(R8) $0 \neq x_1 + 1$;

(R9) $x_1 \neq 0 \to \exists x_2 (x_1 = x_2 + 1)$;

(R10) $x_1 + 0 = x_1$;

(R11) $x_1 + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 1$;

(R12) $x_1 \cdot 0 = 0$;

(R13) $x_1 \cdot (x_2 + 1) = x_1 \cdot x_2 + x_1$;

(R14) $(x_2 = x_1 \cdot x_3 + x_4 \wedge x_4 < x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_6 + x_5 \wedge x_5 < x_1) \to x_4 = x_5$ (*єдиність лишку*).

Означення 18.3. *Будемо казати, що теорія* $\mathfrak{T}$

(1) виражає арифметику, якщо в ній існують

- *для кожного натурального числа n речення з однією вільною змінною* $\mathbf{N}_n(\mathrm{v})$;
- *речення* $\mathbf{S}(x,y,z)$ *та* $\mathbf{P}(x,y,z)$ *із трьома вільними змінними такі, що виконуються твердження*:

1) $\mathfrak{T} \vdash \exists! \mathrm{v} \mathbf{N}_n(\mathrm{v})$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$;

2) $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{N}_n(\mathrm{v}) \to \neg \mathbf{N}_m(\mathrm{v})$, *якщо* $n \neq m$;

3) $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{N}_n(x) \wedge \mathbf{N}_m(y) \wedge \mathbf{N}_{n+m}(z) \to \mathbf{S}(x,y,z)$ *для довільних* $n,m \in \mathbb{N}$;

4) $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{N}_n(x) \wedge \mathbf{N}_m(y) \wedge \mathbf{N}_{nm}(z) \to \mathbf{P}(x,y,z)$ *для довільних* $n,m \in \mathbb{N}$.

До такої теорії, згідно з правилом «виводу з вибором», можна додати константи $\mathbf{B}n$ *і речення* $\mathbf{N}_n(\mathbf{B}n)$. *Ми завжди вважатимемо, що це вже зроблено. Тоді умову* (i) *можна переписати у вигляді* $\mathfrak{T} \vdash \mathbf{N}_n(\mathrm{v}) \to \mathrm{v} = \mathbf{B}n$. *Будемо казати, що константа* $\mathbf{B}n$ *зображає натуральне число* n. *Речення* $\mathbf{S}(x,y,z)$ *та* $\mathbf{P}(x,y,z)$ *треба розглядати як формалізацію виразів, відповідно,* $x + y = z$ *та* $xy = z$. *Тоді твердження* $(iii$-$iv)$ *означають, що дії над константами, які зображають натуральні числа, збігаються з діями над самими цими числами.*

(2) *виражає рекурсивні функції, якщо вона виражає арифметику і для кожної рекурсивної функції* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *існує речення* $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ *теорії* $\mathfrak{T}$ *таке, що* $a_{n+1} = f(a_1,\ a_2, \ldots, a_n)$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\mathfrak{T} \vdash \mathbf{F}(\mathbf{B}a_1, \mathbf{B}a_2, \ldots, \mathbf{B}a_{n+1}) \wedge \big(\mathbf{F}(\mathbf{B}a_1, \mathbf{B}a_2, \ldots, \mathbf{B}a_n, \mathbf{B}y) \to \\ \to \mathbf{B}y = \mathbf{B}a_{n+1}\big).$$

Тут, як і вище, $\mathbf{B}a$ *позначає константу теорії* $\mathfrak{T}$, *яка зображає натуральне число* a. *Казатимемо, що речення* $\mathbf{F}$ *правильно визначає функцію* f.

Основні задачі

18.1. Довести, що такі твердження є теоремами теорії Робінсона для довільних натуральних n,m:

1) $\bar{n} + \bar{m} = \overline{n + m}$;

2) $\bar{n} \cdot \bar{m} = \overline{n \cdot m}$;

3) якщо $n \neq m$, то $\bar{n} \neq \bar{m}$;

4) $(x \leq \bar{n}) \to (x = 0 \vee x = 1 \vee ... \vee x = \bar{n})$;

5) $(x \leq \bar{n}) \vee (\bar{n} \leq x)$.

18.2. Показати, що аксіому (R14) не можна вивести з інших аксіом.

18.3. Довести, що теорія $\mathfrak{R}$ є власною підтеорією **A** (13.1).

18.4. Нехай $\mathbb{M}$ — множина, яка складається з поліномів з цілими коефіцієнтами та додатним старшим коефіцієнтом і нульового полінома. Перевірте, що $\mathbb{M}$ зі звичайними діями додавання та множення поліномів є моделлю теорії $\mathfrak{R}$, але не є моделлю формальної арифметики.

18.5. Довести, що теорія $\mathfrak{R}$ виражає рекурсивні функції.

Література.

[**3**, с. 89–95]; [**4**, с. 167–176].

Список літератури

1. Гохман, А. В. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств / А. В. Гохман и др. Саратов: «Изд-во Саратовского ун-та», 1969.
2. David, R. Introduction à la logique. Théorie de la démonstration; 2e édition / R. David, K. Nour, Ch. Raffali. Paris: Dunod, 2003.
3. Дрозд, Ю. А. Основи математичної логіки: курс лекцій / Ю. А. Дрозд. К. : ВПЦ «Київський університет», 2005.
4. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. М. : «Наука», 1971.
5. Олійник, А. С. Задачі з математичної логіки та теорії алгоритмів / А. С. Олійник, В. І. Сущанський. К. : ВПЦ «Київський університет», 2003.
6. Столл, Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Р. Столл. М. : «Просвещение», 1968.
7. Чёрч., А. Введение в математическую логику 1 / А. Чёрч. М. : «Изд-во иностранной литературы», 1960.
8. Эдельман, С. Л. Математическая логика: учеб. пособ. для ин-тов. / С. Л. Эдельман. М. : «Высшая школа», 1975.